



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Dipartimento di Ingegneria
Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Meccanica

L'ELASTICA DI EULERO

Tesi di Laurea in Scienza delle Costruzioni

Relatore:
Prof. Giuseppe Tomassetti

Candidato:
Chiara Lignola

Anno Accademico 2016-2017

Indice

1	Considerazioni introduttive	1
1.1	La statica dei corpi deformabili	1
1.2	Instabilità e biforcazione	2
2	Lo sviluppo storico	5
2.1	Il contributo di Giacomo Bernoulli	6
2.2	La collaborazione tra Leonardo Eulero e Daniele Bernoulli	9
2.3	Il carico critico euleriano	10
3	L'equazione dell'elastica	14
3.1	La cinematica di una trave inestensibile nel piano	14
3.2	L'equazione costitutiva	17
3.3	Costruzione dell'equazione dell'elastica	20
3.4	Determinazione delle equazioni indefinite di equilibrio: I metodo	21
3.5	Determinazione delle equazioni indefinite di equilibrio: II metodo	23
3.6	Caso I: trave vincolata soggetta a un carico di punta F	29
3.7	Caso II: trave incastrata soggetta a un carico di flessione F	31
4	Le soluzioni dell'elastica	34
4.1	Adimensionalizzazione dell'equazione	35
4.2	Integrali primi	36
4.3	Piano delle fasi	37
4.4	Risoluzione	39
4.5	Configurazioni stabili	48

A Integrali ellittici

50

Elenco delle figure

1.1	Esempio di biforcazione	3
2.1	Albero genealogico dei matematici che hanno dato un contributo nel campo dell'elasticità	5
2.2	Pubblicazione sull'elastica di Giacomo Bernoulli, Acta Eruditorum, 1694	7
2.3	Semplificazione della costruzione geometrica in Fig. 2.2	8
2.4	Problema di minimo: disegno di Eulero, Additamentum I	9
2.5	Alcune delle curve elastiche enumerate da Eulero: di seconda specie (a), di quarta specie (b), di quinta specie (c), di sesta specie (d), di settima specie (e), di ottava specie (f).	10
2.6	Trave snella incastrata in C e libera in A , caricata da un peso verticale P	10
2.7	Colonna fissata sulla base A , portante il peso P	11
2.8	Inflessione della trave al variare del carico applicato P	12
2.9	Andamento del carico critico P_E in funzione dell'angolo φ_b	12
2.10	Grafico del carico critico P_E in funzione dell'angolo φ_b	13
3.1	Sistema di riferimento scelto per la trave elastica di lunghezza l	15
3.2	Asta di lunghezza l : configurazione di riferimento rettilinea e configurazione deformata	17
3.3	Rappresentazione del vettore $\mathbf{t}(s)$	18
3.4	Momento di inerzia di un rettangolo di base b e altezza h	19
3.5	Trave vincolata con schema di semplice appoggio soggetta a un carico di punta F	20
3.6	Analisi dell'equilibrio di forze e momenti relativa a un concio di trave ds	21

ELENCO DELLE FIGURE

3.7	Curva nel piano \mathcal{B}	23
3.8	Curva \mathcal{B} deformata sotto l'azione di forze e coppie	24
3.9	Curva di estremi $[s_1, s_2]$ suddivisa in tre tratti: $[s_1, c], [c, s], [s, s_2]$	25
3.10	Trave vincolata con schema di semplice appoggio soggetta a un carico di punta F	30
3.11	Trave incastrata soggetta a un carico di flessione F nell'estremità libera .	31
4.1	Trave incastrata soggetta a un carico di flessione F nell'estremità libera .	35
4.2	Piano delle fasi: caso della flessione, intervallo $[-3\pi/2 \div \pi/2]$	44
4.3	Piano delle fasi: caso della flessione, intervallo $[-2\pi \div 2\pi]$	45
4.4	Spazio delle fasi: caso della flessione, intervallo $[-2\pi \div 2\pi]$	45
4.5	Piano delle fasi: caso della compressione, intervallo $[-3\pi/2 \div \pi/2]$	46
4.6	Piano delle fasi: caso della compressione, intervallo $[-2\pi \div 2\pi]$	47
4.7	Spazio delle fasi: caso della compressione, intervallo $[-2\pi \div 2\pi]$	47
4.8	Percorso di carico relativo alle configurazioni stabili	48
4.9	Configurazioni stabili della trave	48
4.10	Curve di livello isoenergetico corrispondenti a due configurazioni stabili .	49

Sommario

La tesi ha l'obiettivo di illustrare la storia e lo sviluppo dell'*elastica*, nonché la risoluzione dell'equazione differenziale non lineare che la caratterizza. La teoria delle curve elastiche è stata sviluppata da Leonardo Eulero nel 1744, quale branca della meccanica dei solidi non lineare e ha giocato un ruolo fondamentale per lo sviluppo degli integrali ellittici. L'*elastica*, oggi, è trattata nei testi di scienza delle costruzioni quando si vuole studiare l'instabilità delle strutture e le configurazioni postcritiche che vengono assunte, ovvero quelle che si verificano successivamente alla perdita di stabilità.

Capitolo 1

Considerazioni introduttive

1.1 La statica dei corpi deformabili

I corpi deformabili sono caratterizzati da una struttura geometrica che li rende descrivibili, almeno approssimativamente, per mezzo di segmenti o curve. Questa schematizzazione è possibile qualora la configurazione possa essere assimilata a un segmento di retta o, più in generale, a un tratto di curva regolare, ovvero quando la sezione trasversale possa essere ritenuta di dimensione molto inferiore e, quindi, trascurabile rispetto all'estensione in lunghezza come le aste, i fili e le funi. La branca della matematica che studia oggetti geometrici quali curve, fili, superfici o, più in generale, varietà differenziabili è la geometria differenziale.

La linea elastica di Eulero - o semplicemente l'elastica - rientra nella casistica suddetta ed è alla base della teoria delle curve elastiche. La determinazione delle possibili configurazioni di equilibrio di un'asta elastica, sottile e inestensibile, di peso trascurabile, che risulti incastrata in una parete e soggetta a un carico assegnato è un problema che risale all'epoca dei matematici della famiglia Bernoulli e dell'illustre Leonardo Eulero, al quale, in particolare, si deve la risoluzione del quesito. Si noti che la trave si definisce *elastica* poiché, una volta rimosso il carico, ristabilisce la configurazione rettilinea iniziale. Nell'ingegneria strutturale con la parola *carico* si fa riferimento a un sistema di forze applicate che possono dar luogo a una deformazione e a uno stato di sollecitazione in una struttura.

L'elastica è caratterizzata da un'equazione differenziale non lineare, ma nelle applicazioni ingegneristiche è stata sostituita da un'equazione lineare, in quanto le tipiche deflessioni osservate nelle strutture più comunemente studiate sono abbastanza piccole da poter considerare la configurazione di riferimento uguale a quella corrente. Questa circostanza si vanifica quando si vuole studiare una trave caricata di punta, ovvero soggetta a un carico assiale di compressione applicato nell'estremo libero. La teoria lineare evidenzia che ci si trova ancora in uno stato di equilibrio, tuttavia considerazioni di carattere più fine mostrano l'esistenza di soluzioni multiple. L'elastica è sopravvissuta nei testi di scienza delle costruzioni laddove si debba discutere di instabilità delle strutture al carico di punta. Per calcolare il carico critico (Capitolo 2.3) non è necessario risolvere l'equazione esatta che, invece, risulta indispensabile quando si vogliono determinare le configurazioni postcritiche della trave, ovvero quelle che si verificano successivamente alla perdita di stabilità.

1.2 Instabilità e biforcazione

L'elastica può essere studiata da numerosi punti di vista, uno dei quali la analizza come esempio di soluzione di un problema non lineare di biforcazione e di instabilità, che implica la determinazione dei comportamenti postcritici della trave.

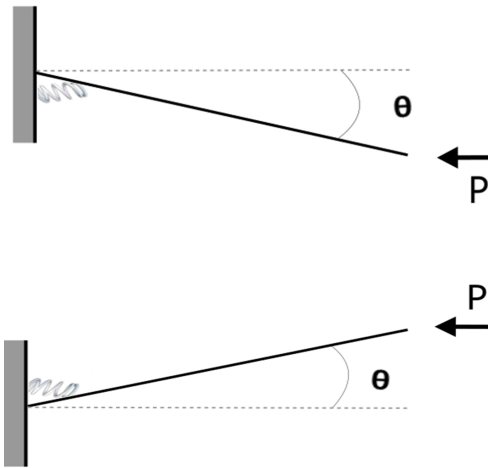
I problemi di biforcazione consistono nello studio matematico dei cambiamenti qualitativi o della struttura topologica degli integrali di un campo vettoriale o, equivalentemente, della soluzione di un'equazione differenziale. Si intende studiare i casi in cui una piccola variazione dei valori dei parametri di biforcazione causa un cambiamento "qualitativo" o topologico del sistema, ossia un cambiamento del numero di punti di equilibrio o della loro natura. Tali cambiamenti possono anche portare ad effetti disastrosi. I valori per cui si hanno modifiche qualitative del sistema sono detti *valori critici*.

Se si incrementano, infatti, le forze applicate ad una struttura in modo quasi statico a partire dalla configurazione di riferimento, la struttura passa attraverso una successione continua di stati di equilibrio. Facendo dipendere le forze applicate da un parametro scalare λ , detto *parametro di carico*, le configurazioni di equilibrio al variare di λ disegnano nello spazio delle configurazioni del sistema un percorso di equilibrio. Assegnato

λ , se per un punto dello spazio delle configurazioni passano più percorsi di equilibrio il punto è chiamato "punto di biforcazione".



Figura 1.1: Esempio di biforcazione



Un esempio elementare di biforcazione è rappresentato dallo studio delle configurazioni di equilibrio di una trave di lunghezza l incernierata a una delle sue estremità, cui è connessa una molla di rigidezza K ; è, inoltre, soggetta a un carico di compressione P in corrispondenza dell'estremità libera (Fig.1.1). Se la forza P è allineata con la cerniera, il sistema è in equilibrio ma non risulta necessariamente stabile, ovvero se il carico P è sufficientemente grande, la configurazione di equilibrio è instabile e assume due forme in funzione dell'angolo ϑ soluzione dell'equazione trascendente.

Il fenomeno dell'instabilità dell'equilibrio delle strutture elastiche è rilevante per molte strutture, in quanto, spesso, il livello dei carichi entro cui si comportano come strutture elastico-lineari può essere facilmente superato anche in condizioni vicine a quelle di esercizio. Viene meno, quindi, l'ipotesi di scrivere le equazioni di equilibrio della trave nella configurazione indeformata; d'ora in poi si parlerà, infatti, di "grandi deformazioni".

Un esempio comune di instabilità è l'instabilità *euleriana* o *elastica* o, in inglese, *buckling*, dovuta a un carico assiale di punta agente su un'asta; esso può provocare l'improvviso collasso di un membro strutturale che risulti soggetto a intensi sforzi di compressione. Il problema maggiore è dovuto al fatto che il collasso si verifica anche quando l'effettivo sforzo di compressione è minore dello sforzo massimo che il materiale che costituisce il membro può sopportare. Il carico di punta assiale è una sollecitazione di compressione applicata alla testa di un'asta. Dato che nella realtà fisica è impossibile che tale compressione solleciti l'asta con uno sforzo normale puro, la sollecitazione non avrà esattamente l'asse coincidente con l'asse baricentrico della sezione, ma si troverà a una certa distanza da esso, creando così un momento flettente. Una struttura snella, ricevendo sollecitazioni di questo tipo, tende a incurvarsi fino al punto di rottura e, di conseguenza, a collassare. Il fenomeno dell'instabilità a carico di punta è da evitare con grande accortezza, poiché disastroso. Per evitare questo fenomeno, occorre prevedere correttamente i carichi di progetto e le azioni sollecitanti, modificandone eventualmente i parametri. Ad esempio:

- riducendo la compressione;
- aumentando l'area della sezione;
- riducendo la lunghezza dell'elemento;
- aggiungendo vincoli con altre aste vicine oppure con il suolo.

Capitolo 2

Lo sviluppo storico

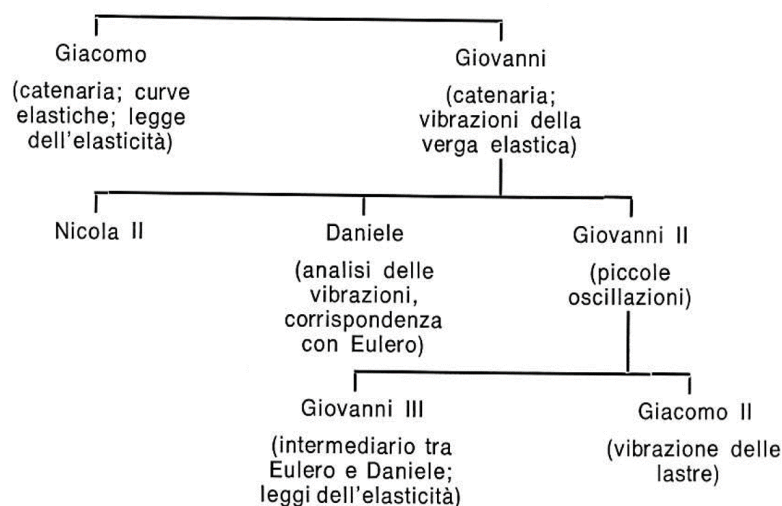


Figura 2.1: Albero genealogico dei matematici che hanno dato un contributo nel campo dell'elasticità

Nell'arco di tempo che va dalla fine del Seicento alla seconda metà del Settecento la teoria delle curve elastiche è oggetto di studio dei maggiori esponenti della cultura matematica e meccanica: la famiglia Bernoulli e l'illustre Leonardo Eulero (1707-1783) condividono teorie e intuizioni attraverso assidui scambi epistolari. La domanda alla base di questo studio è quale configurazione debba essere assunta dall'asse di una trave a cui siano applicati dei carichi, ovvero come si dispone la cosiddetta *linea elastica*. "Il

problema dell'inflessione o della curvatura di travi, di archi, di elementi (monodimensionali) elastici d'ogni specie, a causa del proprio peso o di un peso ad essi applicato o di qualsiasi altra forza sollecitante", Giacomo Bernoulli, *Acta Eruditorum* (paragrafo 3), 1691. Eulero, in particolare, analizzando vari aspetti del tema in questione, pone le basi per il calcolo variazionale (per la ricerca dei punti di massimo e minimo delle curve) e per l'analisi non lineare (utilizzata nel caso delle grandi deformazioni delle travi).

2.1 Il contributo di Giacomo Bernoulli

Il casato Bernoulli, originario di Anversa, dà un enorme contributo alla teoria dell'elasticità (Fig. 2.1): spiccano le figure di Giacomo Bernoulli (1654-1705), di suo fratello Giovanni (1667-1748) e del figlio di quest'ultimo Daniele (1700-1782), fondatore della dinamica dei fluidi. Giacomo Bernoulli, in particolare, nasce nel 1654 in Svizzera a Basilea, eccellente centro di ricerca scientifica. È il primo a formulare le equazioni generali che risolvono completamente il problema dell'equilibrio di una fune flessibile soggetta a una qualsiasi distribuzione di forze tangenziali e normali. Nel testo del 1691 sopra citato Giacomo Bernoulli sottolinea la maggiore difficoltà del problema della verga elastica rispetto a quello della fune precedentemente risolto; impiega, infatti, tre anni prima di esporre il risultato in una memoria degli *Acta Eruditorum* nel 1694.

La costruzione geometrica su cui si basa il ragionamento è molto complessa (Fig. 2.2), tra le ipotesi che Bernoulli formula rientrano la conservazione delle sezioni piane, la condizione per cui le sezioni trasversali si mantengono ortogonali alla linea d'asse deformata e, infine, la fibra inferiore come neutra, ovvero indeformata. Una notevole semplificazione della dimostrazione si ottiene considerando una trave di altezza H caricata da un peso Q (Fig. 2.3).

Si considera l'elemento infinitesimo $ABCD$ con CD pari a ds e AB pari a $ds + \varepsilon_{max}ds$. Dalla similitudine tra i triangoli $B'DB$ e COD si può scrivere:

$$B'B : BD = CD : DO, \quad (2.1)$$

dove $B'B = \varepsilon_{max}ds$, dunque, la proporzione diventa

$$\varepsilon_{max}ds : H = ds : r, \quad (2.2)$$

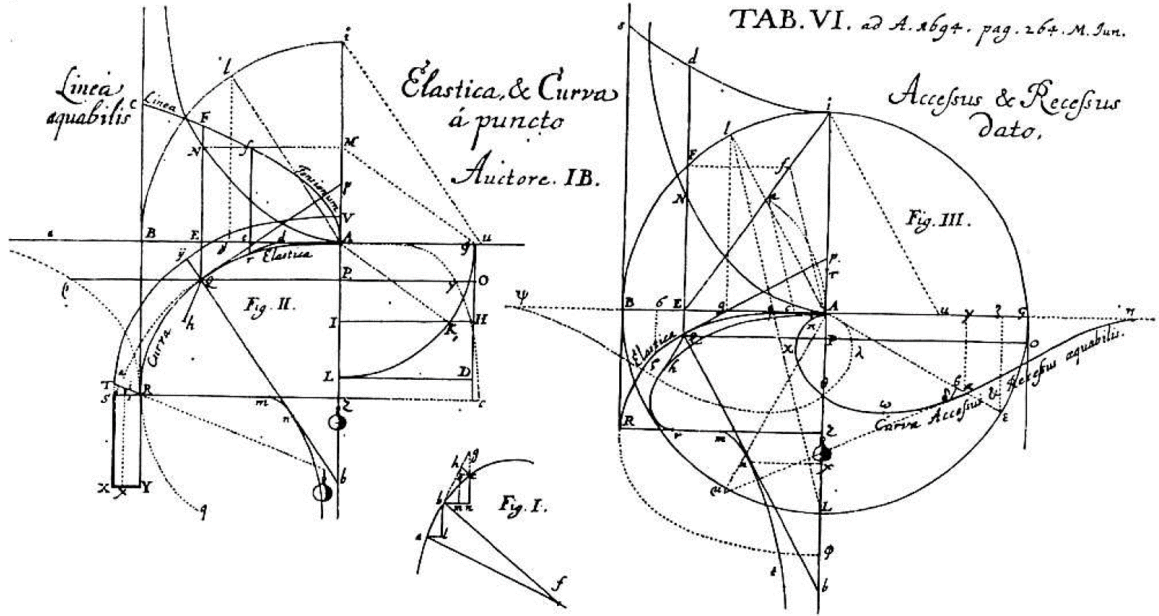


Figura 2.2: Pubblicazione sull'elastica di Giacomo Bernoulli, Acta Eruditorum, 1694

con r pari al raggio di curvatura

$$\frac{1}{r} = \frac{\varepsilon_{max}}{H}. \quad (2.3)$$

È possibile legare la deformazione ε_{max} della fibra superiore alla tensione attraverso la legge di Hooke:

$$\varepsilon_{max} = \frac{\sigma_{max}}{E}; \quad (2.4)$$

la tensione σ_{max} è correlata, invece, al momento flettente tramite una generica funzione f :

$$\sigma_{max} = f(M). \quad (2.5)$$

Le equazioni che riassumono la teoria di Giacomo Bernoulli sulle curve elastiche possono essere determinate, in conclusione, nel seguente modo:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} = \frac{\sigma_{max}}{HE} \\ \frac{1}{r} = \frac{f(M)}{HE}. \end{cases} \quad (2.6)$$

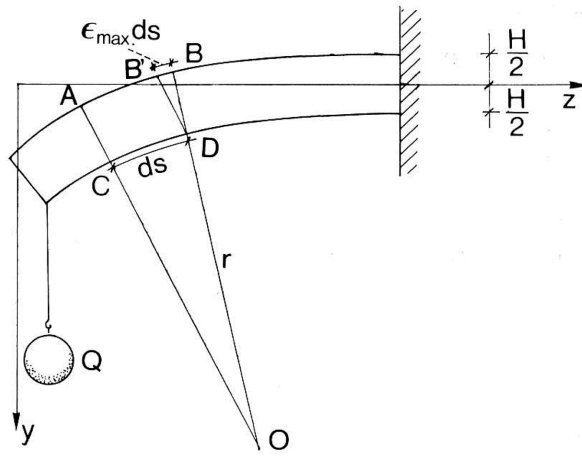


Figura 2.3: Semplificazione della costruzione geometrica in Fig. 2.2

Si noti che tali relazioni (2.6) non sono state dedotte con l'ausilio di considerazioni di equilibrio globale tra le tensioni σ e il momento flettente M .

2.2 La collaborazione tra Leonardo Eulero e Daniele Bernoulli

Il 20 ottobre del 1742 Daniele Bernoulli scrive a Eulero una lettera in cui descrive l'intuizione che si possano ottenere le condizioni di equilibrio per una verga elastica inizialmente rettilinea risolvendo un problema di minimo, ovvero assegnando all'energia potenziale elastica un valore minimo compatibile con i vincoli assegnati sugli spostamenti. "Voi facilmente risolverete tra tutte le curve di ugual lunghezza che non solo passino per A e per B ma anche abbiano in tali punti assegnate pendenze questo problema di determinare quella in cui il valore della seguente espressione

$$\int \frac{ds}{r^2} \quad (2.7)$$

sia minimo". L'energia potenziale elastica è definita come il lavoro compiuto dalle carat-

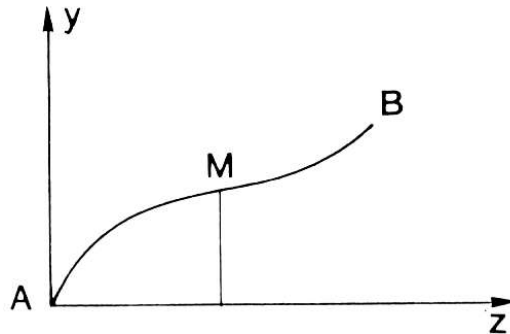


Figura 2.4: Problema di minimo: disegno di Eulero, Additamentum I

teristiche di sollecitazione -in questo caso solo il momento flettente- per la corrispondente deformazione.

2.3 Il carico critico euleriano

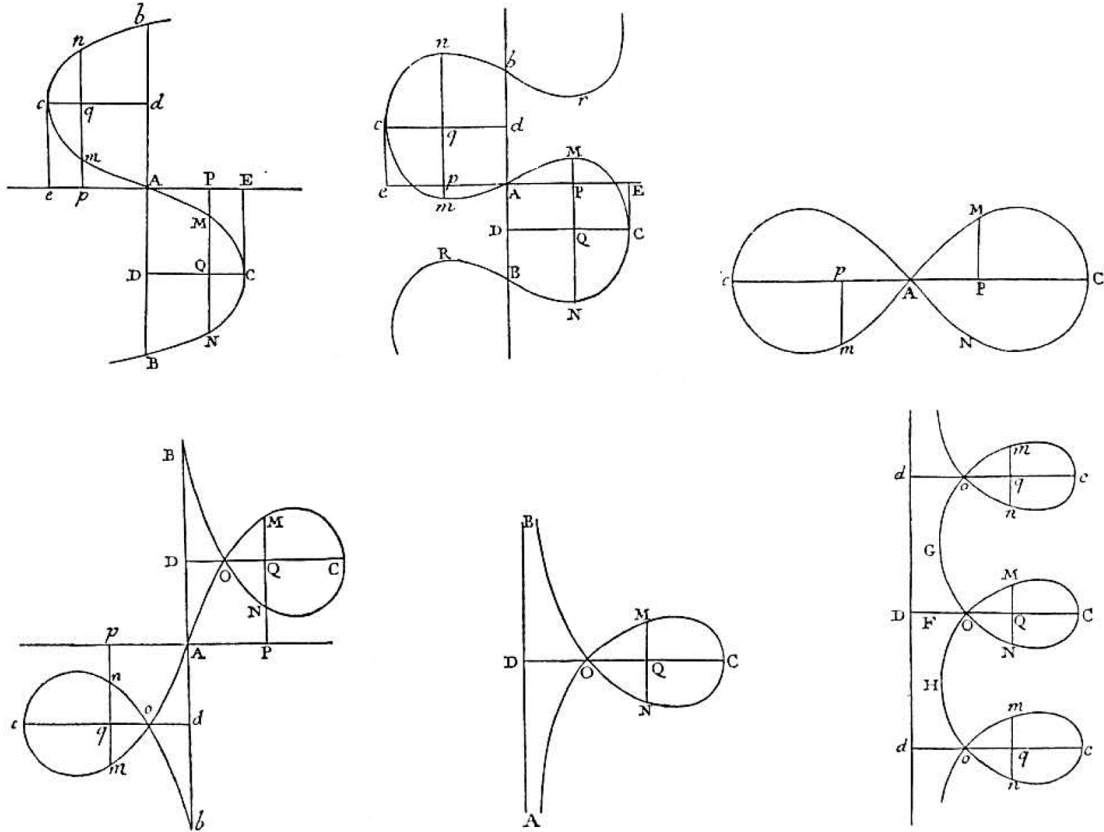


Figura 2.5: Alcune delle curve elastiche enumerate da Eulero: di seconda specie (a), di quarta specie (b), di quinta specie (c), di sesta specie (d), di settima specie (e), di ottava specie (f).

Nei paragrafi 2, 3 e 4 dell'*Additamentum I* Eulero risolve il problema di minimo, mentre nei paragrafi che vanno dal 7 al 13 prepara la strada per il successivo argomento da lui studiato: l'enumerazione delle curve elastiche. Delle nove specie individuate la seconda richiama maggiore interesse, infatti, è possibile sovrapporre al diagramma una trave molto snella incastrata in C e libera in A , dove è caricata da un peso verticale P (Fig. 2.6). Eulero inverte l'orientamento dell'asse y rispetto al riferimento iniziale in

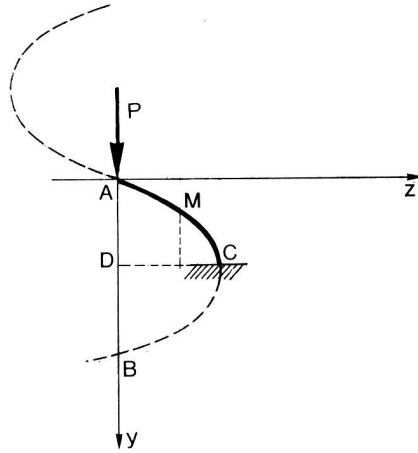


Figura 2.6: Trave snella incastrata in C e libera in A, caricata da un peso verticale P

modo che sia concorde con il verso di P . In particolare risulterà che

$$P = \frac{2EI}{a^2}, \quad (2.8)$$

dove EI rappresenta la rigidezza flessionale (Capitolo 3.2). La distanza AD è pari a $\pi a/2\sqrt{2}$ e differisce poco dalla lunghezza della curva, in quanto l'angolo DAM è piccolissimo, dunque, si ha

$$l = AD = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}}. \quad (2.9)$$

Per indurre "la curvatura infinitamente piccola della lamina (l) occorre una forza P di grandezza finita e precisamente

$$\boxed{P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}}. \quad (2.10)$$

È stato introdotto per la prima volta in modo rigoroso e formale il concetto di *carico critico euleriano*: una trave elastica snella incastrata-libera soggetta a un carico assiale di compressione può inflettersi, a patto che il carico superi il valore critico della (2.10) e, in corrispondenza di tale carico critico, può inflettersi "infinitamente" poco rispetto alla configurazione rettilinea. Eulero riflette sul risultato trovato e ne avverte l'importante significato strutturale. Il paragrafo 37 dell'*Additamentum* ha come titolo "*Sulla forza delle colonne*" e vi si legge "Le cose che sono state annotate possono riuscir utili a giudicare le sollecitazioni delle colonne. Sia data, infatti, la colonna AB fissata verticalmente sulla base A , portante il peso P ." La colonna, prosegue Eulero, è progettata in modo

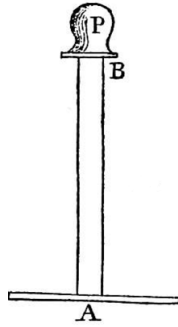


Figura 2.7: Colonna fissata sulla base A, portante il peso P

da non potersi rompere a causa di P , di conseguenza, l'unica cosa da temere è la sua inflessione. Se il carico da sopportare risulta inferiore al P_{cr} - o equivalentemente P_E - non si deve temere alcuna inflessione, in caso contrario, la colonna non potrà resistere all'inflessione. Essendo costanti l'elasticità e la sezione trasversale, il peso P che può essere portato senza pericolo è inversamente proporzionale al quadrato della lunghezza della colonna, quindi, una colonna lunga il doppio può portare solo $1/4$ di quel peso.

La generalità della teoria di Eulero è preziosa per indagare il fenomeno in presenza di grandi spostamenti. Ci si può chiedere per quale valore del carico assiale P si possa conferire alla trave incastrata-libera un'inflessione tale che l'estremo libero B ruoti di un angolo assegnato φ_b : non è possibile attenersi alla teoria linearizzata e occorre risalire all'impostazione di Eulero o a una equivalente. Si noti che al crescere dell'angolo φ_b , aumenta il carico P necessario (Fig. 2.10).

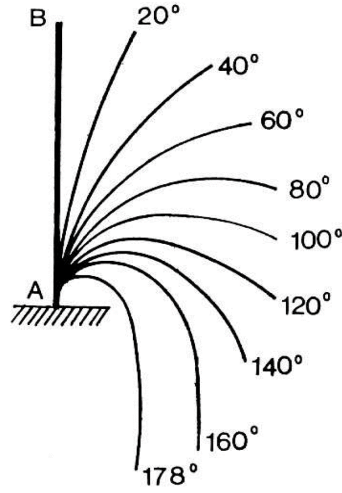


Figura 2.8: Inflessione della trave al variare del carico applicato P

φ_B	20°	40°	60°	80°	100°	120°	140°	160°	178°	180°
P/P_{cr}	1,0153	1,0636	1,1518	1,2939	1,5184	1,8848	2,5424	4,0301	11,971	∞

Figura 2.9: Andamento del carico critico P_E in funzione dell'angolo φ_b

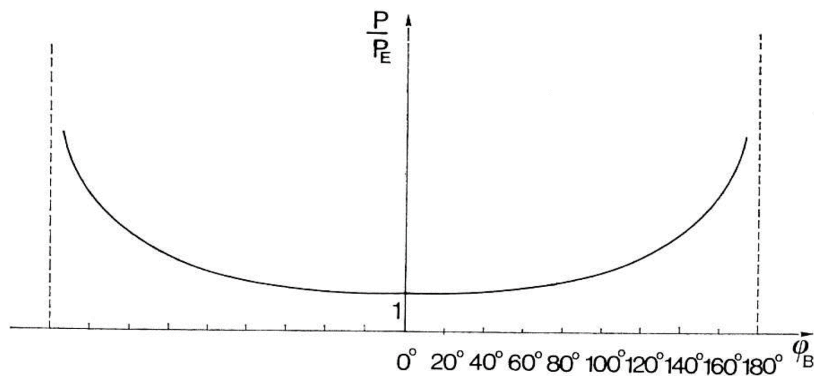


Figura 2.10: Grafico del carico critico P_E in funzione dell'angolo φ_b

Capitolo 3

L'equazione dell'elastica

3.1 La cinematica di una trave inestensibile nel piano

È possibile considerare un sistema di riferimento $(\mathbf{O}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ nel piano se si intende studiare la cinematica di un'asta inestensibile di lunghezza l . I punti materiali di cui è costituito il corpo possono essere identificati con i punti dello spazio da essi occupati nella configurazione corrente. Indicando con s la generica sezione della trave, si considera sulla retta dei numeri reali \mathbb{R} un intervallo $0 - l$ e si prende in esame un'ascissa curvilinea s a esso appartenente. Si introduce a tal proposito una funzione \underline{S} che associ ad ogni valore di s un punto dello spazio descritto dalla coppia di coordinate $[x_1(s), x_2(s)]$; in questo modo si definisce univocamente la posizione occupata dalla sezione s nella configurazione rettilinea di riferimento e in quella deformata (Fig. 3.1):

$$s \longrightarrow [x_1(s), x_2(s)] = \mathbf{r}(s). \quad (3.1)$$

La configurazione di riferimento si può esprimere, pertanto, come

$$\mathbf{r}_0(s) = 0 + s\mathbf{e}_1. \quad (3.2)$$

Il vettore spostamento \mathbf{u} del punto $\mathbf{r}_0(s)$ dalla configurazione di riferimento può essere descritto come segue:

$$\mathbf{u}(s) = u_1(s)\mathbf{e}_1 + u_2(s)\mathbf{e}_2 = \mathbf{r}(s) - \mathbf{r}_0(s). \quad (3.3)$$

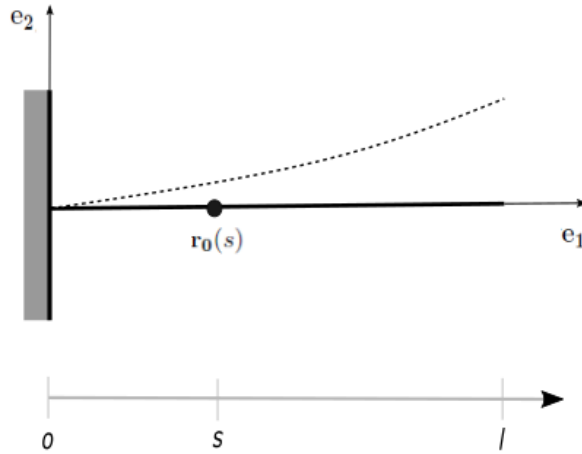


Figura 3.1: Sistema di riferimento scelto per la trave elastica di lunghezza l

È consuetudine prendere in esame due punti vicini sull'asse \mathbf{e}_1 , rappresentati dalle coordinate $\mathbf{r}_0(s)$ e $\mathbf{r}_0(s) + \varepsilon \mathbf{e}_1$, il vettore da essi formato si può scrivere nella configurazione rettilinea come

$$\mathbf{t}_0 = \varepsilon \mathbf{e}_1 \quad (3.4)$$

e

$$\mathbf{r}(s + \varepsilon) - \mathbf{r}(s) \quad (3.5)$$

in quella deformata. Scegliendo ε piccolo, si può procedere con un'espansione in serie di Taylor del vettore $\mathbf{r}_0(s)$ nell'intorno del punto $\varepsilon = 0$ che conduce al seguente risultato

$$\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds}. \quad (3.6)$$

Definizione 1: Inestensibilità

Si considera inestensibile ogni corpo monodimensionale per il quale il rapporto fra la lunghezza di un tratto infinitesimo nella configurazione deformata e la lunghezza del medesimo tratto nella configurazione di riferimento sia pari a uno. Tale derivata misura l'entità dell'allungamento (se maggiore di uno) o della contrazione (se minore di uno) di una porzione infinitesima di continuo. La condizione deve essere soddisfatta a priori in ogni configurazione. Poiché in meccanica si dice vincolo ogni restrizione a priori sull'insieme delle configurazioni o degli atti di moto possibili per un dato sistema materiale, la

condizione

$$\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} = 1 \quad (3.7)$$

si definisce vincolo di inestensibilità. Si osservi che si tratta di un vincolo interno, poiché la restrizione imposta riguarda le posizioni relative dei punti del corpo, piuttosto che la loro collocazione rispetto a oggetti esterni. Le deformazioni dovute allo sforzo normale e di taglio risultano, di conseguenza, trascurabili.

Il vincolo di inestensibilità (3.7) può anche essere scritto come

$$\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} = |\mathbf{t}(s)| = 1, \quad (3.8)$$

utilizzando la definizione di vettore tangente $|\mathbf{t}(s)|$. Indicando d'ora in poi il simbolo di derivata prima con l'apice " ' ", la derivata del vettore $\mathbf{r}(s)$ rispetto all'ascissa curvilinea s diventa

$$\mathbf{r}'(s) = \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds}, \quad (3.9)$$

dunque, la relazione (3.8) assume la seguente forma:

$$\boxed{\mathbf{r}'(s) = |\mathbf{t}(s)| = 1}. \quad (3.10)$$

Si esplicita, di seguito, la definizione del vettore tangente $\mathbf{t}(s)$ alla curva come

$$\mathbf{t}(s) = \sqrt{1 - (u_2'(s))^2} \mathbf{e}_1 + u_2'(s) \mathbf{e}_2, \quad (3.11)$$

dove $u_2'(s)$ rappresenta la derivata della componente verticale del vettore spostamento $\mathbf{u}(s)$ nel sistema di riferimento $(\mathbf{O}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.

L'angolo che il vettore $\mathbf{t}(s)$ forma con l'orizzontale è chiamato $\vartheta(s)$ (Fig. 3.3) ed è tale che

$$\mathbf{t}(s) = \cos \vartheta(s) \mathbf{e}_1 + \sin \vartheta(s) \mathbf{e}_2; \quad (3.12)$$

rappresenta, infatti, la rotazione della tangente $\mathbf{t}(s)$ alla linea d'asse.

Per semplificare la notazione, la dipendenza da s del vettore $\mathbf{t}(s)$, dell'angolo $\vartheta(s)$ e degli spostamenti $\mathbf{u}(s)$ viene omessa.

Una volta definito l'angolo ϑ , è immediato determinare il $\sin \vartheta$ e il $\cos \vartheta$ come

$$\sin \vartheta = u_2', \quad (3.13)$$

$$\cos \vartheta = \sqrt{1 - (u_2')^2}. \quad (3.14)$$

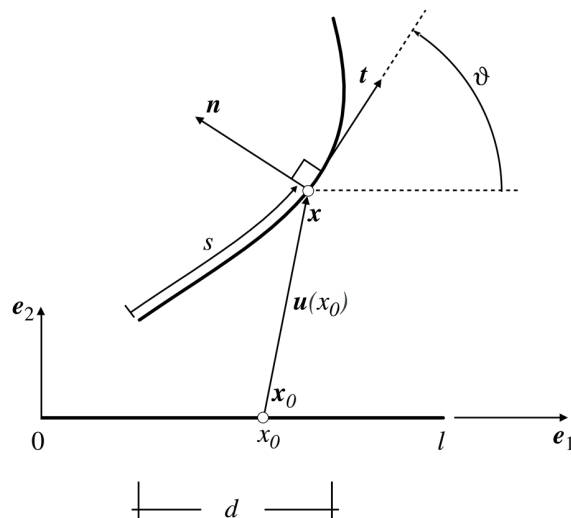


Figura 3.2: Asta di lunghezza l : configurazione di riferimento rettilinea e configurazione deformata

Il vettore normale \mathbf{n} alla deformata in un qualsiasi punto si ottiene, invece, derivando rispetto a s il prodotto scalare del vettore tangente \mathbf{t} con se stesso - ricordando che $\mathbf{n} \perp \mathbf{t}$ e $\mathbf{t}' \perp \mathbf{t}$ -

$$\mathbf{n} = \mathbf{t}' = \mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = -\vartheta' \sin \vartheta \mathbf{e}_1 + \vartheta' \cos \vartheta \mathbf{e}_2; \quad (3.15)$$

dividendo successivamente per la norma, si determina la curvatura k , definita come la derivata prima dell'angolo ϑ

$$|\mathbf{t}'| = |\vartheta'|, \quad (3.16)$$

ovvero

$$\boxed{k = \vartheta'}. \quad (3.17)$$

La curvatura k rappresenta la velocità con cui varia la direzione del versore tangente spostandosi lungo la linea d'asse della trave.

3.2 L'equazione costitutiva

Per determinare l'equazione differenziale della linea elastica si fa riferimento all'equazione costitutiva della trave inflessa, che lega le caratteristiche delle sollecitazioni interne

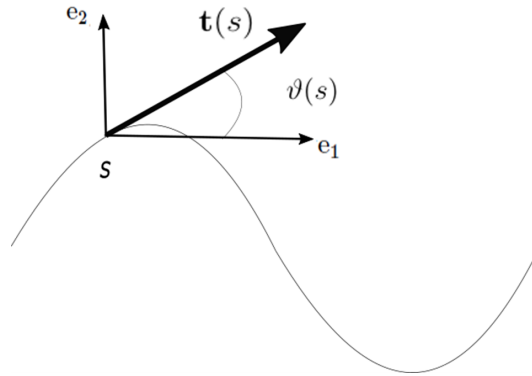


Figura 3.3: Rappresentazione del vettore $\mathbf{t}(s)$

alle caratteristiche di deformazione.

L'ipotesi più semplice che può essere formulata per descrivere il comportamento della trave è che la curvatura risulti direttamente proporzionale al momento flettente $M(s)$. Considerazioni di carattere geometrico più fine portano a introdurre la seguente equazione costitutiva

$$\boxed{k = \vartheta'(s) = \frac{M(s)}{B}}. \quad (3.18)$$

L'angolo $\vartheta(s)$, definito precedentemente come la rotazione della tangente alla linea d'asse, può essere confuso con l'angolo in questione -che identifica la rotazione delle sezioni- nell'ipotesi che le sezioni della trave si mantengano ortogonali alla curva che rappresenta le tangenti ai baricentri. La costante B rappresenta, invece, la rigidità flessionale ed è pari al prodotto tra il modulo di Young E , caratteristica del materiale, e il momento d'inerzia I della sezione

$$B = EI. \quad (3.19)$$

Si noti che il momento flettente $M(s)$ ha le dimensioni di una forza per una lunghezza, mentre la costante B ha le dimensioni di una forza per il quadrato di una lunghezza.

Definizione 2: Modulo di Young E

La misura diretta del rapporto tra lo sforzo e la deformazione σ/ε , nota come legge di Hooke, permette di determinare il modulo di Young E ; esso ha le dimensioni di una forza sul quadrato di una lunghezza, in quanto lo sforzo σ ha le dimensioni di una pressione e

la deformazione ε è una grandezza adimensionale. Il modulo di Young dipende dalle forze interatomiche che agiscono nel materiale e varia di molti ordini di grandezza passando dai materiali più elastici (la gomma) a quelli più rigidi (l'acciaio).

Definizione 3: Momento di inerzia I

Il momento di inerzia di un sistema di masse elementari rispetto a una retta h viene definito come la somma dei prodotti delle singole masse per il quadrato delle rispettive distanze d dalla retta stessa. Nel caso di figure piane e compatibilmente con la possibilità che queste vengano decomposte in parti elementari di cui si conoscano i baricentri (concentrando al posto delle masse i valori delle aree A), il momento di inerzia si valuta come

$$I_h = Ad^2 \quad (3.20)$$

e ha le dimensioni di una lunghezza alla quarta. A titolo di esempio (Fig. 3.4) il momento di inerzia di una qualsiasi sezione rettangolare appartenente all'asta risulta pari a

$$I_h = \frac{bh^3}{12}. \quad (3.21)$$

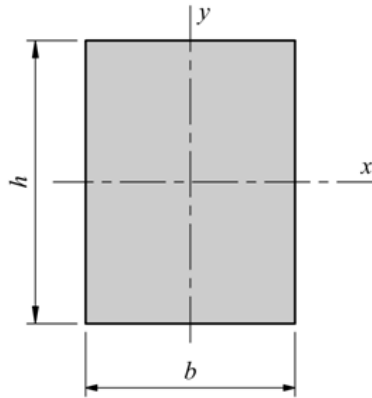


Figura 3.4: Momento di inerzia di un rettangolo di base b e altezza h

3.3 Costruzione dell'equazione dell'elastica

Si consideri una trave vincolata agli estremi con lo schema di semplice appoggio, soggetta a un carico assiale di compressione F (Fig. 3.5).

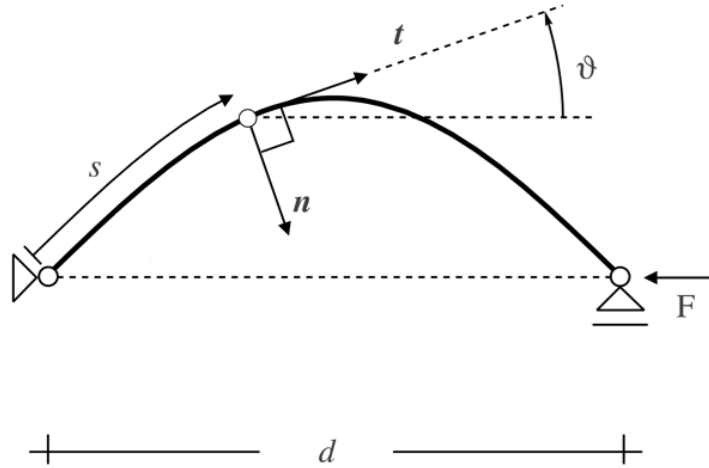


Figura 3.5: Trave vincolata con schema di semplice appoggio soggetta a un carico di punta F

Nel caso in cui i due supporti non coincidano, ovvero la proiezione dell'elastica sull'asse \mathbf{e}_1 ha lunghezza d diversa da zero e pari a

$$d = \int_0^l \cos \vartheta(s), \quad (3.22)$$

imponendo l'equilibrio dei momenti lungo la direzione assiale

$$M(s) = -Fu_2(s) \quad (3.23)$$

e utilizzando la legge costitutiva (3.18), si determina l'equazione differenziale di equilibrio nella configurazione corrente:

$$\vartheta'(s) + \frac{F}{B}u_2(s). \quad (3.24)$$

Derivando l'ultima equazione rispetto a s e adoperando la (3.13)

$$u_2'(s) = \sin \vartheta(s), \quad (3.25)$$

si arriva all'equazione differenziale della linea elastica nell'ipotesi di grandi deformazioni rispetto alla configurazione di riferimento rettilinea

$$\boxed{\vartheta''(s) + \frac{F}{B} \sin \vartheta(s) = 0}. \quad (3.26)$$

Si noti la non linearità dell'equazione dovuta alla presenza del $\sin \vartheta(s)$ e la scrittura formalmente identica a quella del moto di un pendolo semplice.

Se si fa riferimento solo al caso in cui la deformazione dell'asta rispetto alla configurazione di riferimento rettilinea possa essere ritenuta molto "piccola" (ipotesi di "piccole deformazioni") si ottiene una significativa semplificazione della discussione. Si suppone, dunque, che l'angolo ϑ sia tale da poter ritenere valida l'approssimazione secondo cui

$$\sin \vartheta \approx \vartheta, \quad (3.27)$$

$$\cos \vartheta \approx 1. \quad (3.28)$$

3.4 Determinazione delle equazioni indefinite di equilibrio: I metodo

Su una trave elastica - rettilinea nella configurazione di riferimento - che, a seguito dei carichi agenti, abbia conseguito la configurazione deformata in (Fig. 3.6), si consideri un elemento infinitesimo ds , cui corrisponde un raggio di curvatura r .

La forza elementare $\mathbf{f}ds$ agente su di esso è decomposta nella direzione tangente e in quella normale alla curva come $f_t ds$ e $f_n ds$. Poiché $|\mathbf{f}|$ si mantiene finito, le caratteristiche di sollecitazione interne N, T, M -sforzo normale, sforzo di taglio e momento flettente- variano con continuità lungo la curva; infatti se $|\mathbf{f}|$ variasse, le azioni interne sopra citate subirebbero dei salti, ovvero delle discontinuità.

Si impone, quindi, l'equilibrio delle forze agenti nella direzione normale e tangente e, in seguito, l'equilibrio alla rotazione:

$$N + dN - N \cos d\varphi + T \sin d\varphi + f_t ds \frac{\cos d\varphi}{2} = 0 \quad (3.29)$$

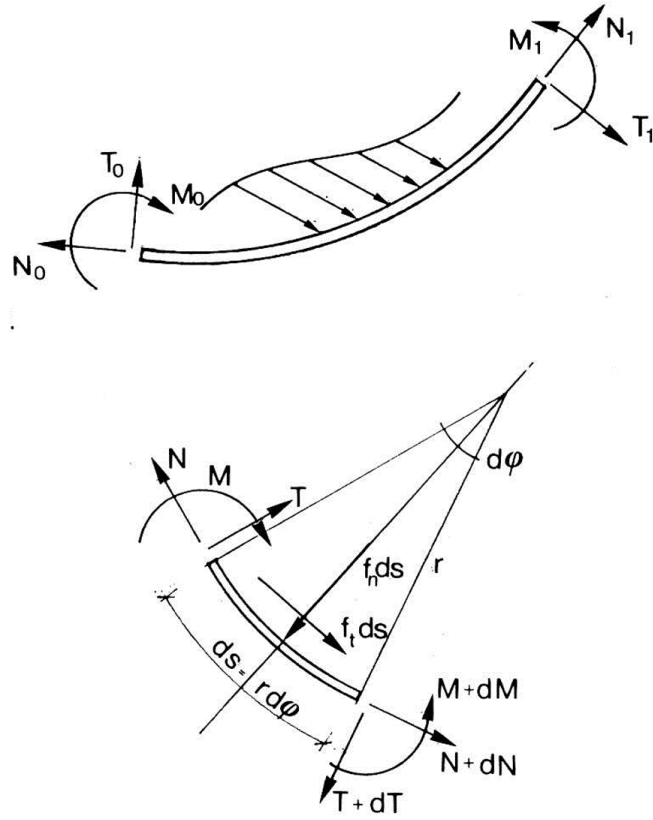


Figura 3.6: Analisi dell'equilibrio di forze e momenti relativa a un concio di trave ds

$$T + dT - T \cos d\varphi - N \sin d\varphi + f_n ds \frac{\cos d\varphi}{2} = 0 \quad (3.30)$$

$$M + dM - M - T ds \cos d\varphi = 0. \quad (3.31)$$

Poiché l'angolo $d\varphi$ è infinitesimo, è possibile approssimare

$$\cos d\varphi = 1 \quad (3.32)$$

e

$$\sin d\varphi = d\varphi \quad (3.33)$$

tramite cui si arriva alle equazioni

$$dN + T d\varphi + f_t ds = 0 \quad (3.34)$$

$$dT - Nd\varphi + f_n ds = 0 \quad (3.35)$$

$$dM - Tds = 0. \quad (3.36)$$

Ricordando la relazione che lega il raggio di curvatura r all'angolo infinitesimo $d\varphi$

$$\frac{1}{r} = \frac{d\varphi}{ds} \quad (3.37)$$

si determinano le equazioni indefinite di equilibrio:

$$\begin{cases} \frac{dN}{ds} + \frac{T}{r} + f_t = 0 \\ \frac{dT}{ds} - \frac{N}{r} + f_n = 0 \\ \frac{dM}{ds} = T. \end{cases} \quad (3.38)$$

Le suddette equazioni sono state elaborate da Eulero nel "Genuina principia doctrinae de statu aequilibrii et motu corporum tam perfecte flexibilium quam elasticorum" nel 1771.

3.5 Determinazione delle equazioni indefinite di equilibrio: II metodo

Nella scienza delle costruzioni è consuetudine determinare le equazioni indefinite di equilibrio di una trave elastica imponendo l'equilibrio alla traslazione e alla rotazione del concio di trave.

Definizione 1: Concio di trave

Si definisce concio una porzione finita di trave delimitata da due sezioni consecutive. Se

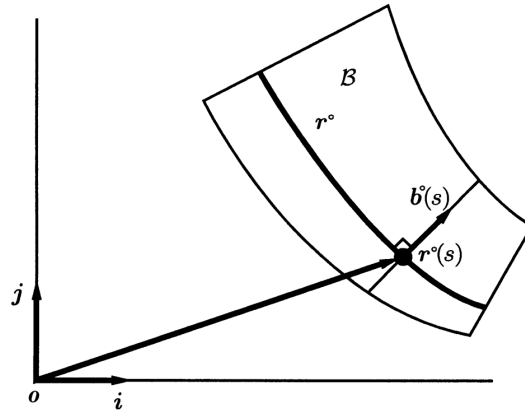


Figura 3.7: Curva nel piano \mathcal{B}

tali sezioni sono poste a distanza infinitesima, si parla di concio di trave elementare.

Un metodo equivalente consiste nel ricavare le relazioni vettoriali che intercorrono tra le parti adiacenti di un corpo bidimensionale, proiettandole lungo le direzioni tangente e normale alla superficie del corpo, descritta da una regione \mathcal{B} del piano, cui è associato un sistema di riferimento $(\mathbf{O}, \mathbf{i}, \mathbf{j})$. La configurazione assunta è quella di riferimento, anche detta *naturale*, in quanto non vi è alcuna forza esercitata tra le parti dello stesso.

All'interno della regione \mathcal{B} è possibile individuare una curva base (Fig. 3.7)

$$[s_1, s_2] \ni s \mapsto \mathbf{r}_0(s) \equiv \mathbf{r}_0(s) \in \mathcal{B}, \quad (3.39)$$

che sotto l'azione di forze e coppie si deforma nella configurazione in figura (3.8)

$$[s_1, s_2] \ni s \mapsto \mathbf{r}(s). \quad (3.40)$$

Il parametro s non rappresenta l'ascissa curvilinea del sistema, in quanto non è stata formulata l'ipotesi di inestensibilità, ovvero il vettore tangente non ha modulo unitario.

Sulla curva di estremi $[s_1, s_2]$ si considera, dunque, un tratto $[c, s]$ (Fig. 3.9); nella configurazione deformata la parte $(s, s_2]$ che segue il tratto $[c, s]$ esercita su di esso, tramite il contatto, una forza risultante

$$\mathbf{n}(s) \quad (3.41)$$

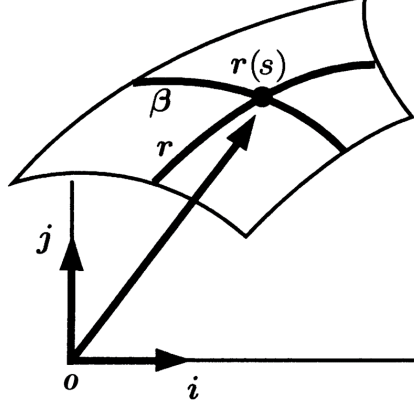


Figura 3.8: Curva \mathcal{B} deformata sotto l'azione di forze e coppie

e un momento risultante

$$(\mathbf{r}(s) - \mathbf{O}) \times \mathbf{n}(s) + \mathbf{m}(s), \quad (3.42)$$

dato dalla somma della coppia di contatto e del momento generato dalla forza $\mathbf{n}(s)$. Si noti che è stato assunto come polo il punto \mathbf{O} e come raggio vettore $(\mathbf{r}(s) - \mathbf{O})$ il segmento che congiunge il polo con il punto s . Trattandosi di un corpo bidimensionale, la forza risultante $\mathbf{n}(s)$ giace nel piano $(\mathbf{O}, \mathbf{i}, \mathbf{j})$, mentre la coppia $\mathbf{m}(s)$ è diretta perpendicolarmente ad esso, ovvero lungo il versore \mathbf{k} in modo tale che i versori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ formino una terna destra.

Allo stesso modo la parte $[s_1, c)$ che precede il tratto $[c, s]$ esercita su di esso, tramite il contatto, una forza risultante

$$-\mathbf{n}(c) \quad (3.43)$$

e un momento risultante

$$(\mathbf{r}(c) - \mathbf{O}) \times -\mathbf{n}(c) - \mathbf{m}(c), \quad (3.44)$$

avendo assunto come polo il punto \mathbf{O} e come raggio vettore $(\mathbf{r}(c) - \mathbf{O})$ il segmento che unisce \mathbf{O} con il punto c .

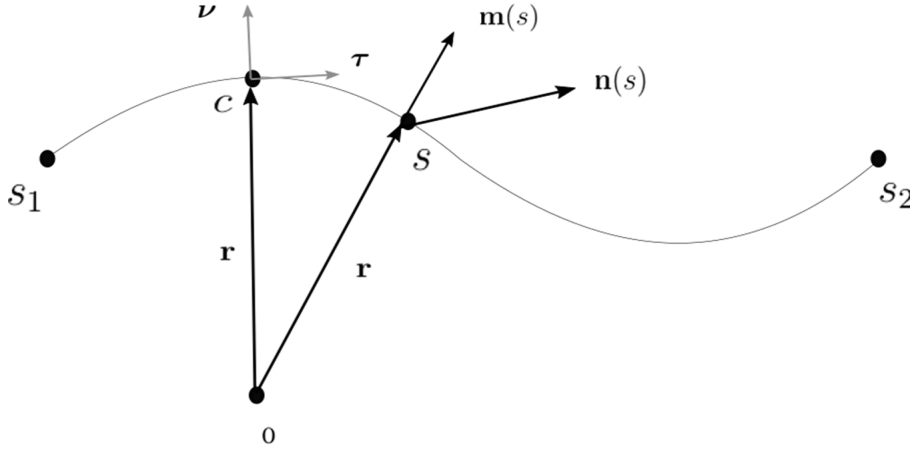


Figura 3.9: Curva di estremi $[s_1, s_2]$ suddivisa in tre tratti: $[s_1, c], [c, s], [s, s_2]$

Il vettore risultante di tutte le forze distribuite, ovvero per unità di lunghezza, agenti nel tratto che va da c a s si può scrivere come

$$\int_c^s \mathbf{f}(\bar{s}) d\bar{s}, \quad (3.45)$$

mentre il vettore risultante di tutte le coppie distribuite come

$$\int_c^s [(\mathbf{r}(\bar{s}) - \mathbf{O}) \times \mathbf{f}(\bar{s}) + \mathbf{l}(\bar{s})] d\bar{s}, \quad (3.46)$$

con $\mathbf{l} = l\mathbf{k}$.

È bene dare la definizione adoperata nella scienza delle costruzioni di carico "concentrato" e "distribuito".

Un carico "concentrato" equivale a una forza applicata concettualmente su una superficie infinitesima o in un punto del materiale di dimensioni infinitesime, ovvero equivale a una forza singola applicata idealmente in un punto.

Un carico "distribuito", invece, è una forza applicata su una superficie avente dimensioni finite, come una linea o un'area, e distribuita sulla stessa secondo una definita legge (equazione) che fornisca la pressione per ciascun punto (di dimensioni infinitesime) della superficie. Nel caso di un carico distribuito su una trave, si usa considera-

re quest'elemento come un'asta, per via della lunghezza che prevale sulle dimensioni trasversali.

Il carico complessivo è la somma integrale di tutte le forze infinitesime moltiplicate per la rispettiva area infinitesima di applicazione.

Affinché la trave in esame sia in equilibrio deve essere nulla la somma di tutte le forze e di tutti i momenti agenti sul tratto $[c, s]$. Si deve tener conto sia delle forze e coppie concentrate che si esplicano mediante il contatto tra le parti, sia delle forze e coppie distribuite:

$$\mathbf{n}(s) - \mathbf{n}(c) + \int_c^s \mathbf{f}(\bar{s}) d\bar{s} = \mathbf{0} \quad (3.47)$$

$$\mathbf{m}(s) - \mathbf{m}(c) + (\mathbf{r}(s) - \mathbf{O}) \times \mathbf{n}(s) - \mathbf{r}(c) \times \mathbf{n}(c) + \int_c^s [(\mathbf{r}(\bar{s}) - \mathbf{O}) \times \mathbf{f}(\bar{s}) + \mathbf{l}(\bar{s})] d\bar{s} = \mathbf{0}. \quad (3.48)$$

Assumendo che tutte le funzioni che compaiono nella (3.47) e (3.48) siano continue e differenziabili, si può derivare rispetto a s ogni grandezza vettoriale. Per le forze si ottiene l'equazione vettoriale

$$\mathbf{n}'(s) + \mathbf{f}(s) = \mathbf{0}. \quad (3.49)$$

La derivata di $\mathbf{n}(c)$ è nulla, non dipendendo da s , e la derivata dell'integrale di $\mathbf{f}(\bar{s})$ rispetto all'estremo di integrazione s è pari a \mathbf{f} per la regola di Leibniz.

Regola di Leibniz nel caso generale:

Dato l'integrale

$$\int_a^b [\mathbf{f}(x) dx], \quad (3.50)$$

se si deriva rispetto all'estremo di integrazione a o b si ottengono due risultati differenti.

Nel primo caso si ha

$$\frac{d}{db} \int_a^b [\mathbf{f}(x) dx] = \mathbf{f}(b), \quad (3.51)$$

nel secondo

$$\frac{d}{da} \int_a^b [\mathbf{f}(x) dx] = -\mathbf{f}(a). \quad (3.52)$$

Si dimostra ora solo il primo caso, in quanto la questione in esame rientra nella prima categoria; la dimostrazione del secondo caso è analoga a meno di un segno.

"Teorema fondamentale del calcolo": dimostra che calcolare il valore dell'integrale di una funzione a partire da un punto fisso a fino a un punto variabile x del suo dominio equivale esattamente a trovare una primitiva della funzione stessa. La prima parte del teorema è detta "Primo teorema fondamentale del calcolo" e garantisce l'esistenza della primitiva per funzioni continue. La seconda parte del teorema è detta "Secondo teorema fondamentale del calcolo" e consente di calcolare l'integrale definito di una funzione attraverso una delle sue primitive.

$$\frac{d}{db} \int_a^b [\mathbf{f}(x)dx] = \lim_{\Delta b \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta b} \left[\int_a^{b+\Delta b} [\mathbf{f}(x)dx] - \int_a^b [\mathbf{f}(x)dx] \right] = \quad (3.53)$$

$$= \lim_{\Delta b \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta b} \int_b^{b+\Delta b} [\mathbf{f}(x)dx] = \quad (3.54)$$

$$= \lim_{\Delta b \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta b} [\mathbf{f}(b)\Delta b + O(\Delta b^2)] = \quad (3.55)$$

$$= \mathbf{f}(b). \quad (3.56)$$

In modo analogo è possibile ottenere l'equazione vettoriale per i momenti:

$$\mathbf{m}'(s) + [(\mathbf{r}(s) - \mathbf{O}) \times \mathbf{n}(s)]' + (\mathbf{r}(s) - \mathbf{O}) \times \mathbf{f}(s) + \mathbf{l}(s) = \mathbf{0}. \quad (3.57)$$

In conclusione, le equazioni indefinite di equilibrio per le travi elastiche sono rappresentate dalle seguenti relazioni vettoriali

$$\mathbf{n}'(s) + \mathbf{f}(s) = \mathbf{0} \quad (3.58)$$

$$\mathbf{m}'(s) + \mathbf{r}'(s) \times \mathbf{n}(s) + \mathbf{l}(s) = \mathbf{0}, \quad (3.59)$$

ove l'ultima equazione (3.59) è stata ricavata sfruttando il valore di $\mathbf{n}'(s)$ (3.58).

Il vettore $\mathbf{n}(s)$ può, in generale, essere proiettato sulla terna intrinseca anche detta *Triedro di Frenet*. Una curva sufficientemente regolare nello spazio ha in ogni suo

punto un sistema di riferimento detto *Triedro di Frenet*, dato da una terna di versori $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$ rispettivamente tangente, normale e binormale. Il versore binormale si ottiene moltiplicando vettorialmente il versore tangente per quello normale:

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\nu}. \quad (3.60)$$

Da notare che per poter definire il *Triedro di Frenet* la curva deve avere ben definiti in ogni punto sia il versore tangente sia quello normale; inoltre, deve essere due volte derivabile.

Nel caso in esame la proiezione del vettore $\mathbf{n}(s)$ lungo $\boldsymbol{\beta}$ è pari a zero:

$$\mathbf{n}(s) = N(s)\boldsymbol{\tau}(s) + T(s)\boldsymbol{\nu}(s). \quad (3.61)$$

Il vettore $\mathbf{n}'(s)$ si ottiene, invece, derivando ogni singolo termine rispetto al parametro s , adoperando la regola di derivazione del prodotto e riprendendo le relazioni che legano i versori suddetti alla curvatura k . Esistono, infatti, tre formule che esprimono la decomposizione delle derivate dei versori costituenti il triedro di Frénet, che prendono il nome di *formule di Frenet*:

$$\boldsymbol{\tau}' = k\boldsymbol{\nu} \quad (3.62)$$

$$\boldsymbol{\nu}' = -k\boldsymbol{\tau} \quad (3.63)$$

$$\boldsymbol{\beta}' = -\mathbf{t}\boldsymbol{\nu}, \quad (3.64)$$

ove \mathbf{t} rappresenta la *torsione* della curva. Dunque si ha per la forza concentrata

$$\mathbf{n}' = (N' - kT)\boldsymbol{\tau} + (T' + kN)\boldsymbol{\nu}, \quad (3.65)$$

e per la coppia concentrata

$$\mathbf{m}(s) = M\boldsymbol{\beta}(s). \quad (3.66)$$

Sostituendo le nuove espressioni di \mathbf{n}' e \mathbf{m} nelle equazioni vettoriali precedentemente ricavate, si determinano le equazioni di equilibrio in forma scalare:

$$\begin{cases} N' - kT + \mathbf{f}_\tau = 0 \\ T' + kN + \mathbf{f}_\nu = 0 \\ M' + 1 - \mathbf{r}'T = 0. \end{cases} \quad (3.67)$$

3.6 Caso I: trave vincolata soggetta a un carico di punta F

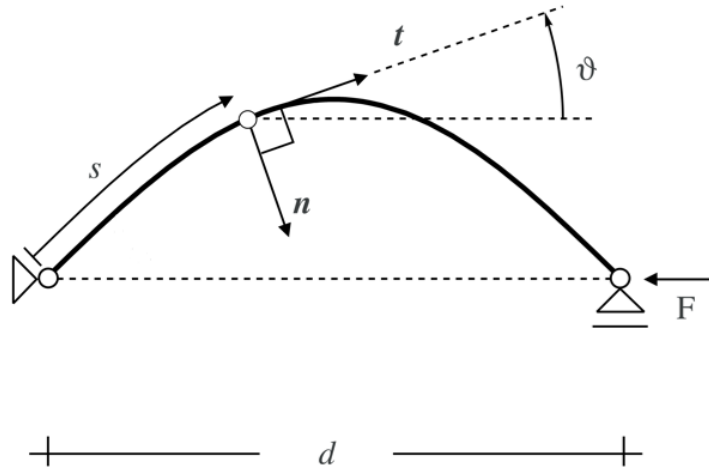


Figura 3.10: Trave vincolata con schema di semplice appoggio soggetta a un carico di punta F

Un metodo alternativo finalizzato a ricavare l'equazione differenziale della linea elastica per una trave soggetta a un carico di compressione consiste nell'utilizzare le equazioni indefinite di equilibrio; si fa riferimento alla relazione secondo cui la derivata del momento flettente è pari al taglio. Ipotizzando di fare un taglio in una sezione qualsiasi della trave, si determina facilmente la caratteristica di sollecitazione taglio T proiettando il carico di compressione F lungo la tangente al piano

$$T = F \sin \vartheta. \quad (3.68)$$

Per come sono orientati i versori del Triedro di Frenet $\boldsymbol{\tau}$ e $\boldsymbol{\nu}$, il taglio è pari a:

$$T(s) = -F \sin \vartheta(s). \quad (3.69)$$

Utilizzando la terza equazione indefinita di equilibrio sopra citata (3.67)

$$\frac{dM}{ds} = M' = T \quad (3.70)$$

risulta che

$$M'(s) = T(s) = -F \sin \vartheta(s). \quad (3.71)$$

Facendo riferimento all'equazione costitutiva (3.18)

$$M(s) = B\vartheta'(s) \quad (3.72)$$

e derivando una volta rispetto a s , si ricava l'espressione del momento flettente M in funzione dell'angolo ϑ :

$$M' = B\vartheta''. \quad (3.73)$$

Sostituendo, infine, la nuova espressione del momento nell'equazione (3.70), si determina l'equazione differenziale della linea elastica:

$$M' = B\vartheta'' = -F \sin \vartheta \quad (3.74)$$

$$B\vartheta'' + F \sin \vartheta = 0 \quad (3.75)$$

$$\boxed{\vartheta'' + \frac{F}{B} \sin \vartheta = 0}. \quad (3.76)$$

3.7 Caso II: trave incastrata soggetta a un carico di flessione F

Qualora il carico F applicato nell'estremo libero di una trave inestensibile di lunghezza l non fosse più di compressione ma di trazione (Fig. 3.11), l'equazione differenziale della linea elastica assumerebbe una forma differente.

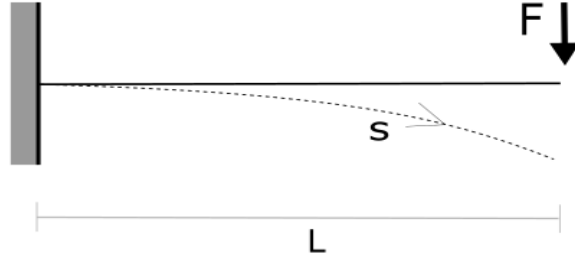


Figura 3.11: Trave incastrata soggetta a un carico di flessione F nell'estremità libera

Come nel caso della compressione si considera nel piano un sistema di riferimento $(\mathbf{O}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ e si introduce una funzione \underline{S} che associ a ogni valore dell'ascissa curvilinea s un punto dello spazio. Si definisce, in seguito, il vettore spostamento \mathbf{u} che ha componenti orizzontale pari a u_1 e componente verticale pari a u_2 , avendo omesso la dipendenza dei vettori dall'ascissa curvilinea s . Imponendo l'equilibrio alla rotazione

$$M = Fu_1 \quad (3.77)$$

e sfruttando l'espressione del momento flettente a partire dall'equazione costitutiva (3.18)

$$M = B\vartheta', \quad (3.78)$$

si individua l'equazione secondo cui

$$B\vartheta' = Fu_1, \quad (3.79)$$

ovvero

$$B\vartheta' - Fu_1 = 0. \quad (3.80)$$

Derivando una volta rispetto a s

$$B\vartheta'' - Fu_1' = 0 \quad (3.81)$$

e assumendo

$$u_1' = \cos \vartheta, \quad (3.82)$$

si determina, dunque, l'equazione differenziale della linea elastica

$$\boxed{\vartheta'' - \frac{F}{B} \cos \vartheta = 0}. \quad (3.83)$$

Calcolando il momento flettente $M(s)$ con un procedimento equivalente, è possibile ottenere lo stesso risultato. Si noti che il parametro s viene nuovamente reso esplicito con lo scopo di evidenziare i singoli termini da derivare.

$$M(s) = -F \int_s^l \cos \vartheta(\bar{s}) d\bar{s}. \quad (3.84)$$

Sfruttando l'equazione costitutiva si ha

$$B\vartheta'(s) = M(s) = -F \int_s^l \cos \vartheta(\bar{s}) d\bar{s}, \quad (3.85)$$

ovvero

$$B\vartheta'(s) + F \int_s^l \cos \vartheta(\bar{s}) d\bar{s} = 0. \quad (3.86)$$

Derivando, dunque, ogni termine rispetto a s e adoperando la regola di Leibniz per gli integrali, si determina l'equazione differenziale dell'elastica.

"Regola di Leibniz" nel caso generale:

$$\int_a^b [\mathbf{f}(x) dx], \quad (3.87)$$

$$\frac{d}{da} \int_a^b [\mathbf{f}(x) dx] = -f(a). \quad (3.88)$$

Nel caso in esame

$$\int_s^l \cos \vartheta(\bar{s}) d\bar{s}, \quad (3.89)$$

$$\frac{d}{ds} \int_s^l \cos \vartheta(\bar{s}) d\bar{s} = -\cos \vartheta(s). \quad (3.90)$$

In conclusione, è possibile scrivere

$$B\vartheta''(s) - F \cos \vartheta(s) = 0, \quad (3.91)$$

$$\boxed{\vartheta''(s) - \frac{F}{B} \cos \vartheta(s) = 0}. \quad (3.92)$$

Capitolo 4

Le soluzioni dell'elastica

La difficoltà maggiore che si riscontra nello studio delle travi in grandi deformazioni è l'impossibilità di tracciare - anche per strutture staticamente determinate - il diagramma delle caratteristiche delle sollecitazioni interne, non essendo nota la deformazione. L'ipotesi di piccoli spostamenti non è più accettabile: l'elastica è un modello di trave in cui gli spostamenti sono grandi e tra le possibili soluzioni compaiono le cosiddette soluzioni "arricciate", che hanno forme diverse a seconda dell'entità più o meno grande del carico applicato alla trave. Si osserva, infatti, una molteplicità di soluzioni che va ben oltre quello che ci si aspetterebbe e per coglierne la ricchezza è conveniente adottare un'impostazione del problema basata sullo spazio delle fasi, procedimento che consiste nel risolvere l'equazione identificando ogni soluzione come una traiettoria nello spazio.

L'elastica è un'equazione differenziale non lineare la cui risoluzione non può essere attuata in forma chiusa, richiedendo l'introduzione di una funzione in termini di integrale che non è calcolabile linearmente in quanto non esprimibile in termini di funzioni elementari (integrali ellittici). L'elastica si definisce autonoma poiché i coefficienti che vi compaiono non dipendono dalla variabile indipendente s . L'equazione autonoma gode di un'importante proprietà: si può sempre ridurre di grado.

La trave in esame è un'asta incastrata soggetta a una forza tagliante verticale F applicata nell'estremo libero, che ha verso opposto a quello del modello analizzato nel capitolo 3.7 (Fig. 3.11). L'equazione che caratterizza la trave di cui alla figura (4.1) è la

seguinte:

$$\boxed{\vartheta''(s) + \frac{F}{B} \cos \vartheta(s) = 0}. \quad (4.1)$$

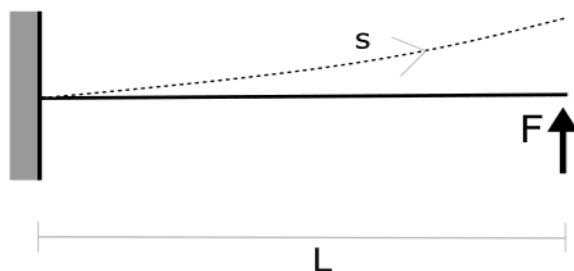


Figura 4.1: Trave incastrata soggetta a un carico di flessione F nell'estremità libera

4.1 Adimensionalizzazione dell'equazione

Il primo passaggio per la determinazione delle soluzioni consiste nella adimensionalizzazione dell'equazione; si noti che ogni termine ha le dimensioni dell'inverso di una lunghezza al quadrato. È possibile introdurre la variabile adimensionale

$$x = \frac{s}{l} \quad (4.2)$$

tale che la derivata dell'angolo ϑ rispetto a s diventi

$$\frac{d\vartheta}{ds} = \frac{d\vartheta}{dx} \frac{dx}{ds} = \frac{1}{l} \frac{d\vartheta}{dx}. \quad (4.3)$$

Derivando una seconda volta rispetto all'ascissa curvilinea s si ottiene

$$\frac{d^2\vartheta}{ds^2} = \frac{1}{l^2} \frac{d^2\vartheta}{dx^2}. \quad (4.4)$$

L'equazione dell'elastica può, quindi, essere riscritta in funzione di x :

$$\frac{d^2\vartheta}{dx^2} + \frac{Fl^2}{B} \cos \vartheta = 0. \quad (4.5)$$

Il prodotto

$$p = \frac{Fl^2}{B} \quad (4.6)$$

è costante e adimensionale e si definisce *carico adimensionale*. Il rapporto tra F e B conta in maniera diversa a seconda della lunghezza della trave: se, ad esempio, l raddoppia, la forza F diminuisce di un fattore 4. In conclusione, l'equazione dell'elastica in forma adimensionale assume la forma:

$$\boxed{\vartheta''(x) + p \cos \vartheta(x) = 0}. \quad (4.7)$$

4.2 Integrali primi

Si vuole mostrare in questo paragrafo come si possa diminuire di 1 il grado dell'equazione differenziale. Si moltiplicano ambo i membri dell'equazione (4.7) per $\vartheta'(x)$

$$\vartheta'(x)[\vartheta''(x) + p \cos \vartheta(x)] = 0 \quad (4.8)$$

e si utilizza la regola di catena

$$\cos' \vartheta(x) \vartheta'(x) = [\sin \vartheta(x)]' \quad (4.9)$$

$$\vartheta'(x) \vartheta''(x) = \frac{1}{2} [\vartheta'(x)^2]'. \quad (4.10)$$

Apportando le opportune sostituzioni, si giunge all'equazione dell'elastica in funzione della variabile adimensionale x

$$\frac{1}{2} [\vartheta'(x)^2]' + p [\sin \vartheta(x)]' = 0. \quad (4.11)$$

In questa forma è immediato derivare una volta rispetto a x

$$\frac{\vartheta'(x)^2}{2} + p \sin \vartheta(x) = \text{costante} = E. \quad (4.12)$$

La *costante* determina in maniera cruciale il problema e rappresenta la pseudo energia posseduta dal sistema, ovvero l'energia paragonabile a quella di un pendolo ruotato di 90 gradi; può essere, pertanto, denominata E .

Introducendo la *curvatura* k

$$k = \vartheta'(x) \quad (4.13)$$

e derivando una seconda volta l'equazione, si ottiene un sistema di equazioni differenziali non lineari nelle incognite $\vartheta(x)$ e $\vartheta'(x)$:

$$\begin{cases} k' = -p \cos \vartheta(x) \\ \vartheta'(x) = k. \end{cases} \quad (4.14)$$

4.3 Piano delle fasi

Per risolvere il sistema di equazioni differenziali non lineari (4.14) è opportuno adottare un procedimento che consiste nell'identificare ogni soluzione come una traiettoria nel piano. La condizione iniziale del problema per l'angolo ϑ è nota:

$$\vartheta(0) = 0; \quad (4.15)$$

per conoscere la curvatura iniziale è necessario, invece, risolvere l'equazione, dunque, si pone

$$k(0) = \textit{incognito}. \quad (4.16)$$

Introducendo un vettore \mathbf{y} , il sistema di equazioni differenziali diventa

$$\mathbf{F} : \mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}); \quad (4.17)$$

se si immagina di associare alla variabile x uno psuedo tempo, che corrisponde alla variabile ϑ nel diagramma delle fasi, il vettore $\mathbf{y}'(x)$, corrispondente a ϑ' , rappresenta la derivata temporale di \mathbf{y} ed è una funzione del vettore \mathbf{y} stesso. Tracciando la soluzione del sistema sul piano delle fasi si ottiene una curva, i cui estremi corrispondono alle condizioni

$$\begin{cases} \mathbf{y}(0) \\ \mathbf{y}(1), \end{cases} \quad (4.18)$$

se si considera per semplicità la lunghezza totale della trave pari a 1. Tale curva presenta delle restrizioni: in corrispondenza dell'incastro l'angolo ϑ è nullo

$$\mathbf{y}(0) \longrightarrow \vartheta(0) = 0, \quad (4.19)$$

pertanto, $\mathbf{y}(0)$ deve trovarsi sull'asse verticale del piano; inoltre, quando la curvatura k è positiva, anche ϑ è positivo mantenendo lo stesso segno. Nel semipiano superiore,

infatti, ϑ risulta crescente mentre in quello inferiore calante ed è per questo motivo che il diagramma viene definito "piano delle fasi". Qualora il diagramma venisse visualizzato in tre dimensioni, assumerebbe la denominazione di "spazio delle fasi". La funzione \mathbf{F} è un campo vettoriale che a ogni punto \mathbf{y} associa un valore $\mathbf{f}(\mathbf{y})$, il quale indica come si muove il punto rappresentativo della soluzione. Tale campo vettoriale si definisce *flusso* ed è tale che se si lascia cadere una particella (ad esempio di fluido) sul piano, essa sarà trascinata dal campo di velocità \mathbf{f} e seguirà il flusso. I punti in cui la particella rimarrà ferma sono, al contrario, punti stazionari o zeri della funzione $\mathbf{f}(\mathbf{y})$:

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}) = 0, \quad (4.20)$$

condizione verificata se e solo se

$$k = 0 \quad \text{e} \quad \cos \vartheta = 0, \quad (4.21)$$

ovvero

$$k = 0 \quad \text{e} \quad \vartheta = \frac{\pi}{2} + K\pi \quad (4.22)$$

con $K \in$ all'insieme dei numeri interi \mathbb{Z} .

Gli zeri della funzione che risultano particolarmente rilevanti sono

$$-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \quad (4.23)$$

in quanto

$$-\frac{3\pi}{2} \text{ e } \frac{\pi}{2}$$

delimitano le regioni che si possono raggiungere sull'asse orizzontale ($\vartheta' = 0$) del piano delle fasi partendo da quello verticale ($\vartheta = 0$).

Le curve che si individuano sul piano sono a stesso livello "energetico" come già evidenziato nell'equazione (4.12), in base alla quale la pseudo energia si conserva sempre; le stesse rappresentano tutte le possibili soluzioni del problema, ovvero le configurazioni assunte dalla trave:

$$\boxed{\frac{k^2}{2} + p \sin \vartheta(x) = \text{costante} = E}. \quad (4.24)$$

Se si pensa a $\vartheta(x)$ come uno pseudo tempo (sull'asse delle ascisse) e $\vartheta'(x) = k$ come una pseudo velocità angolare (sull'asse delle ordinate), allora $k^2/2$ rappresenta la pseudo energia cinetica del punto, mentre $p \sin \vartheta(x)$ la pseudo energia potenziale; di conseguenza, E indica la pseudo energia totale del sistema. Quest'ultima risulta, dunque, costante e presenta nella realtà due contributi: una quota parte di energia immagazzinata nella curvatura $k^2/2$ e un'altra dovuta ai carichi $p \sin \vartheta(x)$.

Come accennato nel Capitolo 3, si evidenzia la somiglianza dell'equazione dell'elastica con quella di un pendolo ruotato di 90 gradi, in cui la forza di gravità agisce verso destra, anziché verso il basso. Il caso

$$\vartheta(x) = -\frac{\pi}{2} \quad (4.25)$$

corrisponde nel pendolo alla condizione di moto nullo (pendolo immobile), mentre il caso

$$\vartheta(x) = +\frac{\pi}{2} \quad (4.26)$$

produce soluzioni che oscillano indefinitamente nel tempo, ovvero un moto che non si interrompe mai.

La pseudo energia E risulta costante per ogni punto per cui è possibile prendere come riferimento il valore che assume in corrispondenza dell'estremo libero dell'asta:

$$\beta = \vartheta(1); \quad (4.27)$$

l'equazione (4.25) diventa:

$$\boxed{\frac{\vartheta'^2}{2} + p \sin \vartheta = p \sin \beta}, \quad (4.28)$$

omettendo da questo punto in poi la dipendenza di ϑ da x .

4.4 Risoluzione

Il primo passaggio che si attua per risolvere l'equazione (4.28) consiste nell'isolare il quadrato di ϑ a sinistra dell'equazione, ottenendo:

$$\vartheta'^2 = 2p(\sin \beta - \sin \vartheta); \quad (4.29)$$

applicando di seguito la radice quadrata di ambo i membri, si ricava la derivata prima di ϑ :

$$\vartheta' = \sqrt{2p} \sqrt{(\sin \beta - \sin \vartheta)} = \frac{d\vartheta}{dx}. \quad (4.30)$$

Si noti che la differenza $(\sin \beta - \sin \vartheta)$ non è sempre positiva e può essere, infatti, maggiore o minore di 0 (ovvero β maggiore o minore di ϑ) a seconda del tipo di soluzione scelta. Si introducono successivamente due nuovi angoli $\bar{\vartheta}$ e $\bar{\beta}$ tali che

$$\bar{\vartheta} = \vartheta + \frac{\pi}{2} \quad (4.31)$$

$$\bar{\beta} = \beta + \frac{\pi}{2}; \quad (4.32)$$

utilizzando le proprietà della trigonometria risulta che

$$\sin \vartheta = -\cos \bar{\vartheta}, \quad (4.33)$$

$$\sin \beta = -\cos \bar{\beta}. \quad (4.34)$$

I termini appena calcolati possono, quindi, essere sostituiti nell'equazione (4.30) che assume la forma

$$\frac{d\bar{\vartheta}}{dx} = \sqrt{2p} \sqrt{\cos \bar{\vartheta} - \cos \bar{\beta}}, \quad (4.35)$$

$$= \sqrt{2p} \sqrt{(1 - \cos \bar{\beta}) + (1 - \cos \bar{\vartheta})}, \quad (4.36)$$

se si aggiunge e si sottrae 1 sotto radice. Ricordando le *formule di bisezione* per un generico angolo α :

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \quad (4.37)$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}, \quad (4.38)$$

si può adoperare nel caso in esame la (4.37) considerando α una volta uguale a β e una seconda volta uguale a ϑ . L'equazione (4.36), di conseguenza, diventa:

$$\frac{d\bar{\vartheta}}{dx} = 2\sqrt{p} \sqrt{\sin^2 \frac{\bar{\beta}}{2} - \sin^2 \frac{\bar{\vartheta}}{2}}. \quad (4.39)$$

Si osserva sotto radice (4.39) il *modulo ellittico* k definito come

$$k = \sin \frac{\bar{\beta}}{2}; \quad (4.40)$$

i valori che k può assumere sono limitati all'intervallo che va da 0 a 1. L'equazione (4.39) può essere riscritta ora come

$$\frac{d\bar{\vartheta}}{ds} = 2\sqrt{p} \sqrt{k^2 - \sin^2 \frac{\bar{\vartheta}}{2}} = \quad (4.41)$$

$$= 2\sqrt{p}k \sqrt{1 - \frac{1}{k^2} \sin^2 \frac{\bar{\vartheta}}{2}}. \quad (4.42)$$

Si introduce, in seguito, l'angolo ψ definito come

$$\psi = \frac{\bar{\vartheta}}{2}. \quad (4.43)$$

Sostituendo il valore di ψ nell'equazione (4.42) si trova che

$$2\frac{d\psi}{dx} = 2\sqrt{p}k \sqrt{1 - \frac{1}{k^2} \sin^2 \psi}. \quad (4.44)$$

Si isolano a sinistra dell'equazione (4.44) tutti i termini che dipendono dall'angolo ψ

$$\frac{d\psi}{k \sqrt{1 - \frac{1}{k^2} \sin^2 \psi}} = dx \sqrt{p} \quad (4.45)$$

e si integrano ambo i membri della stessa

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4}} \frac{d\psi}{k \sqrt{1 - \frac{1}{k^2} \sin^2 \psi}} = \int_0^1 ds \sqrt{p} = \sqrt{p}. \quad (4.46)$$

È possibile identificare con un nuovo parametro \bar{k} l'espressione $1/k$

$$\bar{k} = \frac{1}{k}; \quad (4.47)$$

l'equazione (4.46) diventa, quindi,

$$\bar{k} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \bar{k}^2 \sin^2 \psi}} = \sqrt{p}, \quad (4.48)$$

in cui compare al primo membro un integrale ellittico incompleto di I specie. Utilizzando le funzioni ellittiche citate nell'*Appendice A* si ottiene la seguente relazione:

$$\boxed{\sqrt{p} = \bar{k}[\mathcal{F}(\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4}, \bar{k}) - \mathcal{F}(\frac{\pi}{4}, \bar{k})]}, \quad (4.49)$$

che lega il carico p all'angolo β , ovvero il carico che si deve applicare all'estremo della trave per avere un'inflessione assegnata, quindi, per un determinato valore dell'angolo β . Calcolato il carico, si possono determinare le soluzioni dell'elastica a partire dall'equazione (4.30):

$$\vartheta' = \sqrt{2p} \sqrt{(\sin \beta - \sin \vartheta)} = \frac{d\vartheta}{dx}. \quad (4.50)$$

Si integrano ambo i membri dell'equazione (4.50) rispettivamente tra 0 e $\vartheta(x)$ e tra 0 e s :

$$\int_0^{\vartheta(x)} \frac{d\vartheta}{\sqrt{(\sin \beta - \sin \vartheta)}} = \int_0^x \sqrt{2p} dx = \sqrt{2p}x, \quad (4.51)$$

ottenendo

$$\sqrt{p}x = \bar{k}[\mathcal{F}(\frac{\vartheta}{2} + \frac{\pi}{4}, \bar{k}) - \mathcal{F}(\frac{\pi}{4}, \bar{k})]. \quad (4.52)$$

Isolando a sinistra dell'equazione (4.52) il termine $\frac{\vartheta}{2}$ e introducendo la funzione *ampiezza am* (Appendice A), si determina la soluzione dell'equazione differenziale dell'elastica:

$$\frac{\vartheta(x)}{2} = am[\mathcal{F}(\frac{\pi}{4}, \bar{k}) + \frac{\sqrt{p}x}{\bar{k}}, \bar{k}] - \frac{\pi}{4}, \quad (4.53)$$

$$\boxed{\vartheta(x) = 2am[\mathcal{F}(\frac{\pi}{4}, \bar{k}) + \frac{\sqrt{p}x}{\bar{k}}, \bar{k}] - \frac{\pi}{2}}. \quad (4.54)$$

Tutte le soluzioni dell'equazione (4.54) sono tracciate sui diagrammi del piano e dello spazio delle fasi, utilizzando il software di calcolo *Mathematica*. Vengono riportati di seguito i grafici delle soluzioni relativi a due intervalli distinti: il primo grafico (4.2) evidenzia gli angoli ϑ compresi tra $-3\pi/2$ e $\pi/2$, il secondo (4.3) e il terzo (4.4) gli angoli tra -2π e 2π . La diversa gradazione di colore blu (da meno a più intenso) che si osserva nel piano delle fasi indica configurazioni della deformata a più alto livello energetico

che risulta proporzionale all'aumento del carico applicato. Dal piano delle fasi si può leggere il valore dell'energia di una curva di livello intersecando la curva stessa con l'asse orizzontale, ovvero quello corrispondente a $k = 0$, come si deduce dall'equazione di seguito:

$$\boxed{\frac{k^2}{2} + p \sin \vartheta(x) = \text{costante} = E}. \quad (4.55)$$

Si osservi che per definizione il seno è limitato dal basso

$$|\sin \vartheta(x)| \leq 1 \quad (4.56)$$

e k^2 è un numero positivo per cui il valore minimo di energia che caratterizza le soluzioni risulta

$$\boxed{E \geq -P}, \quad (4.57)$$

che corrisponde a

$$\begin{cases} k = 0 \\ \vartheta(x) = -\frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (4.58)$$

La curvatura k può assumere qualsiasi valore poiché non esiste un limite dall'alto, tuttavia, se l'energia aumenta molto, le curve non intersecano più l'asse orizzontale. Dallo studio suddetto si evince che tutte le possibili soluzioni dell'elastica si muovono nel piano delle fasi lungo curve isoenergetiche che hanno origine sull'asse verticale e terminano su quello orizzontale, presentando, inoltre, lo stesso carattere qualitativo indipendentemente da come viene disposto il carico.

Analizzando, in conclusione, lo spazio delle fasi (Fig. 4.4), si osserva che per ogni 2π è presente una sella decentrata di $-\pi/2$ in corrispondenza della quale si riscontra il massimo energetico; l'andamento della pseudo energia, infatti, risulta oscillare in maniera costante da un minimo a un massimo.

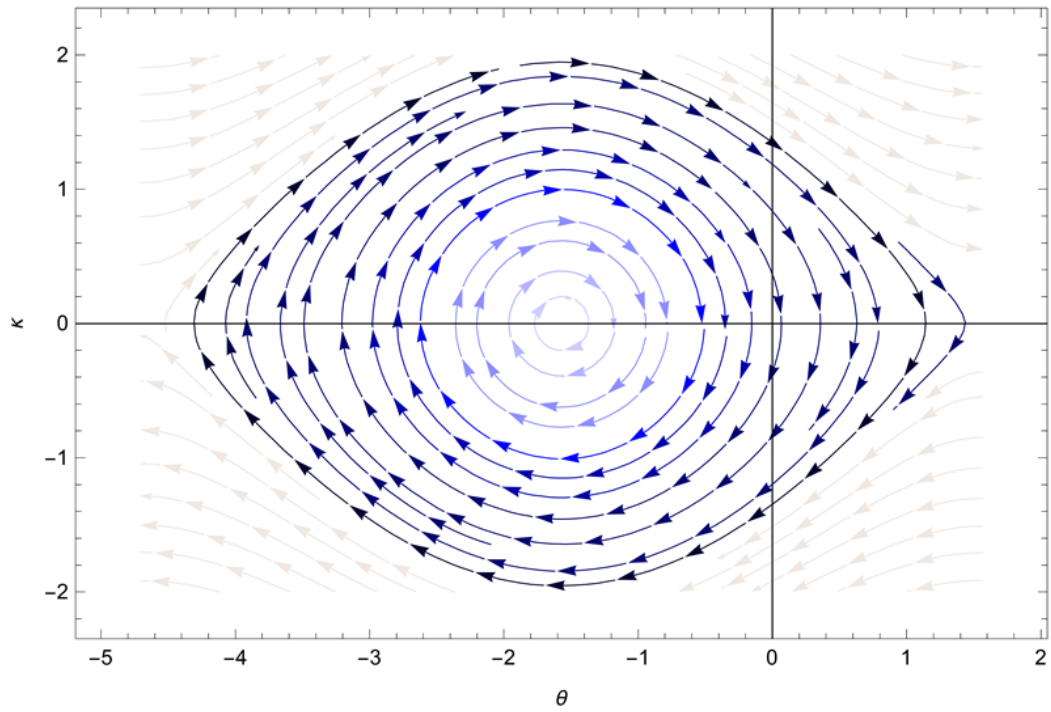


Figura 4.2: Piano delle fasi: caso della flessione, intervallo $[-3\pi/2 \div \pi/2]$

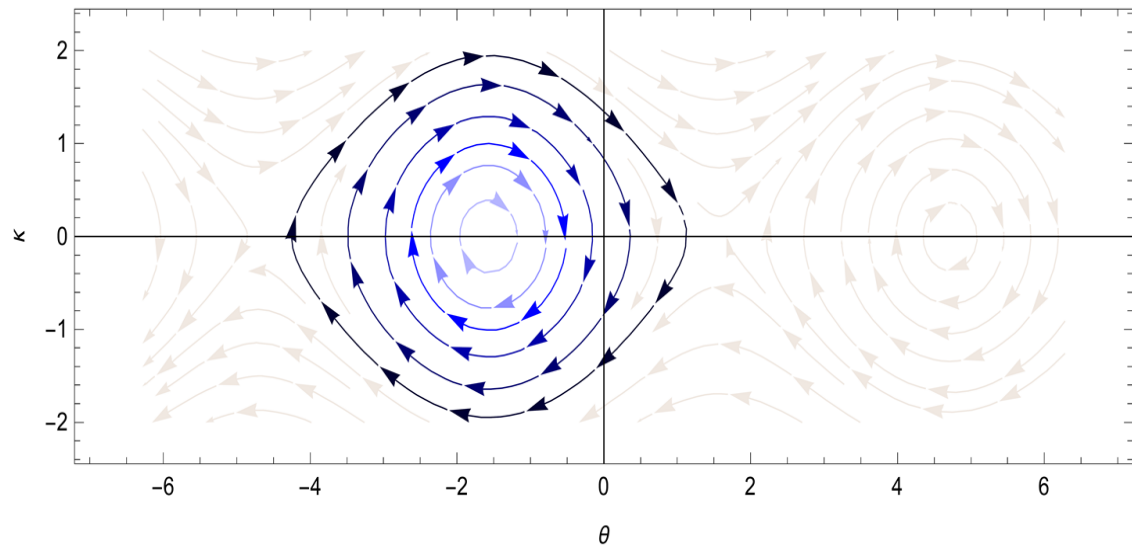


Figura 4.3: Piano delle fasi: caso della flessione, intervallo $[-2\pi \div 2\pi]$

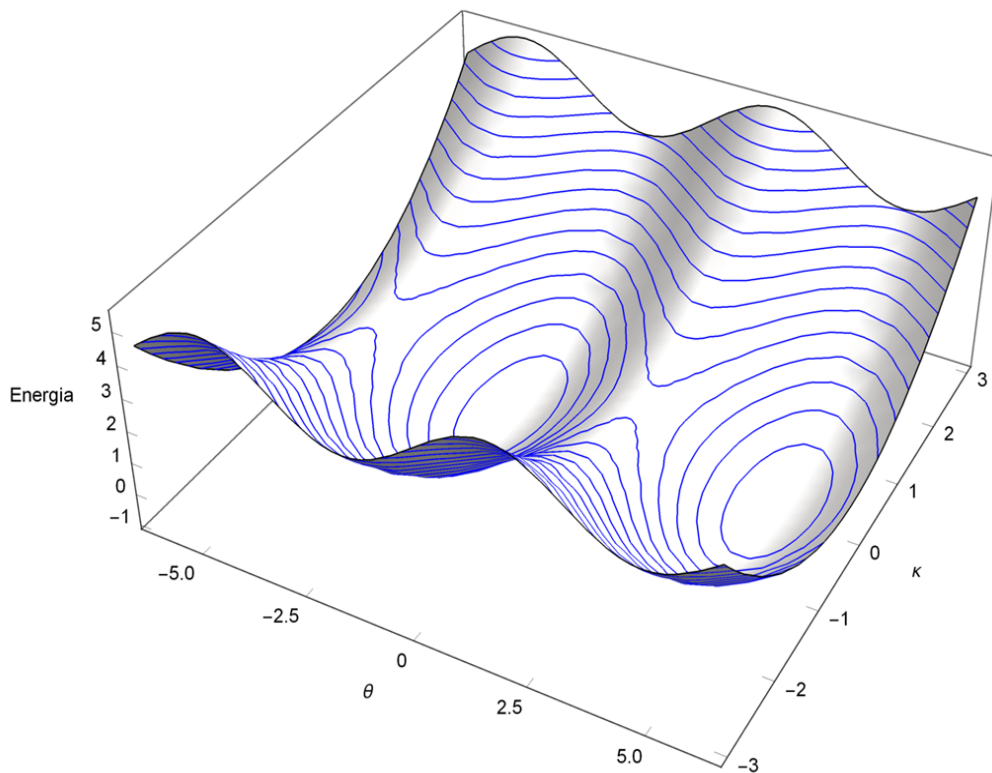


Figura 4.4: Spazio delle fasi: caso della flessione, intervallo $[-2\pi \div 2\pi]$

Confrontando il caso trattato sinora con quello della trave vincolata soggetta a un carico di punta F (Cap. 3.6) e applicando il medesimo procedimento matematico, si determinano le relazioni che caratterizzano rispettivamente il piano e lo spazio delle fasi; le stesse risultano qualitativamente simili a quelle ricavate in precedenza:

$$\begin{cases} k' = -p \sin \vartheta(x) \\ \vartheta'(x) = k, \end{cases} \quad (4.59)$$

$$\frac{k^2}{2} - p \cos \vartheta(x) = \text{costante} = E. \quad (4.60)$$

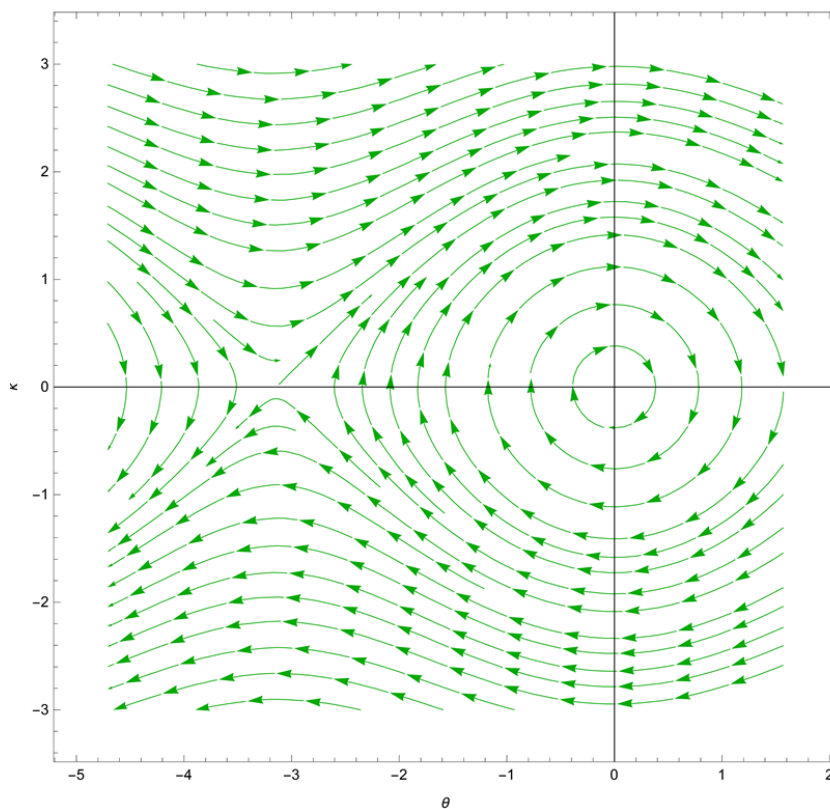


Figura 4.5: Piano delle fasi: caso della compressione, intervallo $[-3\pi/2 \div \pi/2]$

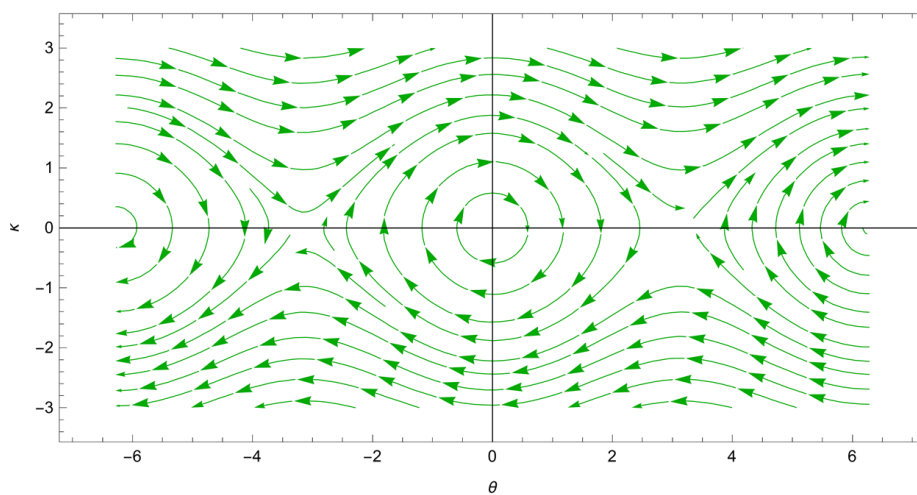


Figura 4.6: Piano delle fasi: caso della compressione, intervallo $[-2\pi \div 2\pi]$

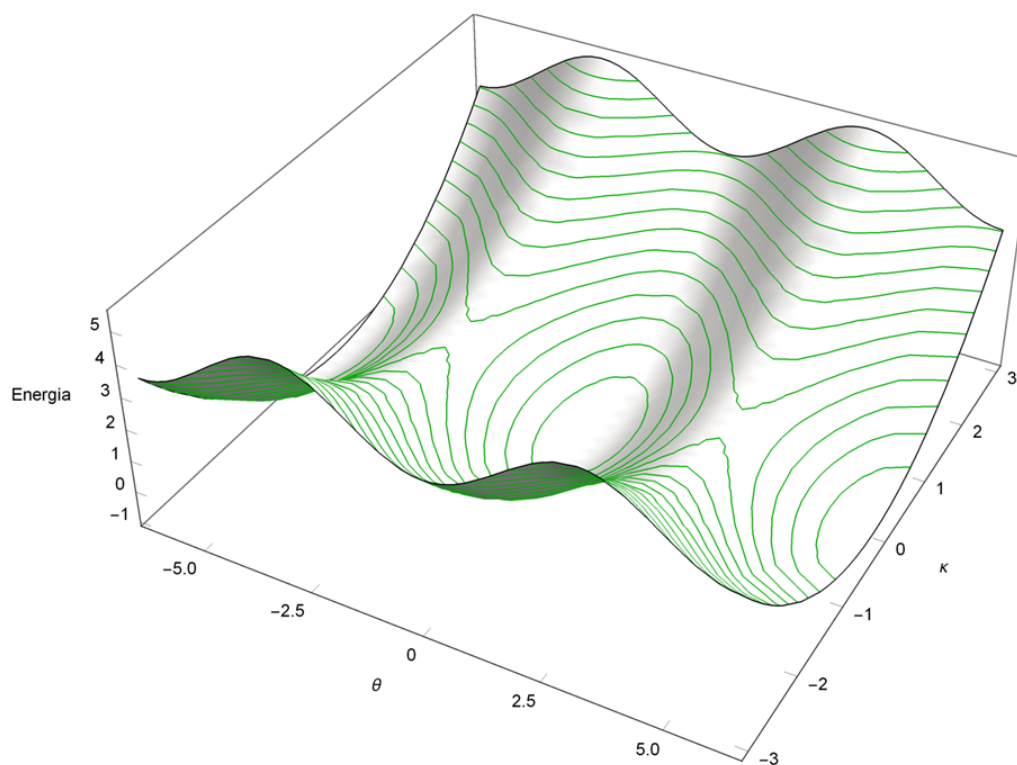


Figura 4.7: Spazio delle fasi: caso della compressione, intervallo $[-2\pi \div 2\pi]$

4.5 Configurazioni stabili

Tra le configurazioni stabili e instabili (arricciate) che si determinano nella risoluzione della trave incastrata e soggetta a una forza verticale F , sono state analizzate solamente quelle stabili (Fig. 4.9). La classe di deformate cui appartengono sono definite nel diagramma del percorso di carico (Fig. 4.8) rispettivamente negli intervalli: $[0 \div \pi/2]$ (blu) e $[-\pi \div -3\pi/2]$ (arancione). Utilizzando nuovamente il software di calcolo Mathematica, sul piano delle fasi e all'interno dei suddetti intervalli sono state tracciate due configurazioni (Fig. 4.10) corrispondenti agli angoli $\pi/4$ e $-5\pi/4$.

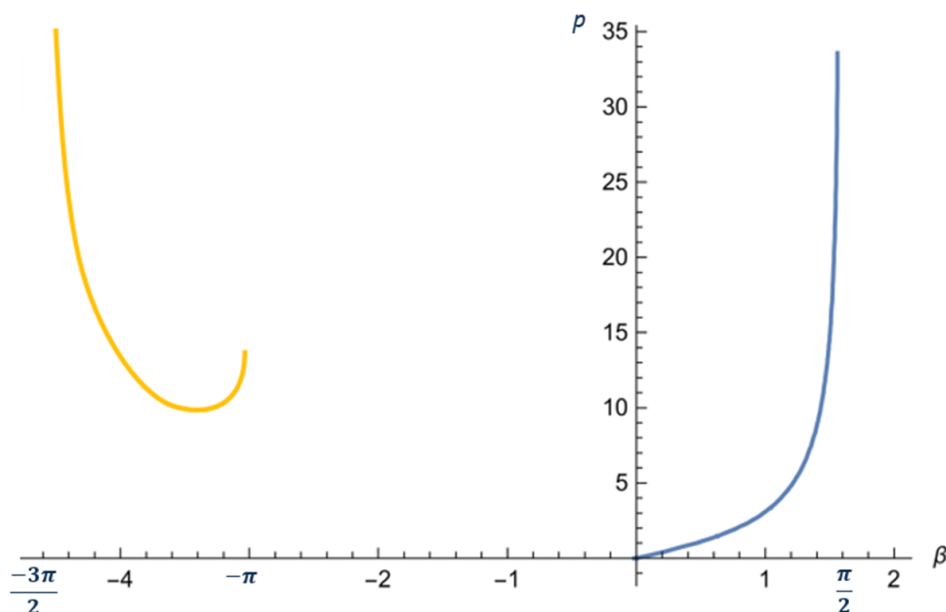
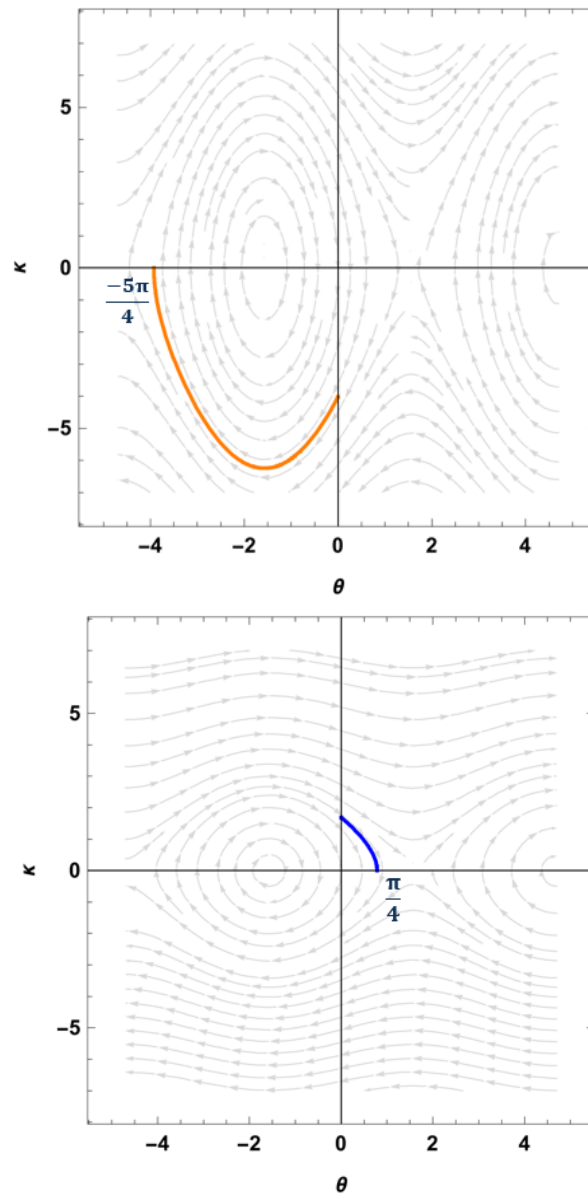


Figura 4.8: Percorso di carico relativo alle configurazioni stabili

Figura 4.9: Configurazioni stabili della trave



Figura 4.10: Curve di livello isoenergetico corrispondenti a due configurazioni stabili



Appendice A

Integrali ellittici

Un integrale ellittico può essere scritto nella forma più generale come

$$\int_c^x \frac{A(x) + B(x)\sqrt{S(x)}}{C(x) + D(x)\sqrt{S(x)}} dx, \quad (\text{A.1})$$

dove $A(x), B(x), C(x)$ e $D(x)$ rappresentano dei polinomi nella variabile x , $S(x)$ è un polinomio di grado 3 o 4 privo di radici multiple, mentre la variabile d'integrazione c è una costante. Il concetto di integrale ellittico è emerso originariamente in connessione con il problema del calcolo della lunghezza degli archi di un'ellisse. Il primo ad interessarsene e studiarli è stato Eulero. In generale, gli integrali ellittici non possono essere espressi in termini di funzioni elementari; con appropriate riduzioni delle formule, tuttavia, ogni integrale ellittico può essere riportato a una forma che coinvolge integrali di funzioni razionali. Le tre forme canoniche sono: integrali ellittici di prima, seconda e terza specie completi e incompleti.

Il metodo di risoluzione prevede l'utilizzo delle funzioni ellittiche, ovvero le funzioni inverse degli integrali ellittici; la funzione di Jacobi \mathcal{F} ne è un esempio:

$$\mathcal{F}[\text{sn}(z, k), k] = z. \quad (\text{A.2})$$

L'*ampiezza* di Jacobi $\text{am}(u, m)$ è definita come l'inverso dell'integrale ellittico di prima specie. Le funzioni ellittiche di Jacobi possono essere considerate come un'estensione

delle funzioni trigonometriche:

$$\begin{cases} sn(u, m) = \sin \phi = x = \sin am(u, m) \\ cn(u, m) = \cos \phi = \sqrt{1 - x^2} = \cos am(u, m) \\ dn(u, m) = \sqrt{1 - m \sin^2 \phi} = \sqrt{1 - mx^2} = \sqrt{1 - m \sin^2 am(u, m)}. \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Si noti che quando $m = 0$, sn e cn sono uguali rispettivamente al \sin e \cos , mentre quando $m = 1$ sono pari alla tangente iperbolica \tanh e a $1/\cosh$. Per qualsiasi valore di m valgono le seguenti relazioni:

$$sn^2 u + cn^2 u = 1, \quad (\text{A.4})$$

$$msn^2 u + dn^2 u = 1 \quad (\text{A.5})$$

$$sn(0) = 0 \quad (\text{A.6})$$

$$cn(0) = dn(0) = 1. \quad (\text{A.7})$$

I parametri che caratterizzano le funzioni di Jacobi sono:

- il modulo ellittico k , che varia tra 0 e 1;
- il modulo complementare $k' = \sqrt{1 - k^2}$;
- il parametro $m = k^2$;
- l'angolo modulare α , con $k = \sin \alpha$;
- l'ampiezza ϕ o u , le espressioni sono equivalenti in quanto $\phi = am u$;
- il delta di ampiezza $\Delta(\phi)$.

La funzione ampiezza u può essere espressa sia in funzione dell'angolo θ sia in funzione del parametro t :

$$u = \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m \sin^2 \theta}} = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - mt^2)}} \quad (\text{A.8})$$

con le sostituzioni $t = \sin \theta, x = \sin \phi$.

Bibliografia

- [1] Antman, Stuart S. (1995), *Nonlinear Problems of Elasticity*, Springer New York, Cap. 4 Planar Steady-State Problems for Elastic Rods.
- [2] Benvenuto, Edoardo (2006), *La scienza delle costruzioni ed il suo sviluppo storico*, Edizioni di storia e letteratura, Cap. 6 Curve flessibili ed elastiche.
- [3] Bigoni, Davide (2012), *Nonlinear solid mechanics. Bifurcation theory and material instability*, Cambridge University Press, Cap. 1.13 The Euler elastica and the double supported beam subject to compressive load.
- [4] Biscari P., Saccomandi G., Ruggeri T., Vianello M., (2013), *Meccanica Razionale*, Springer, Cap. 13 Statica dei continui monodimensionali.
- [5] Hall, Leon M., *Special functions*, Department of Mathematics and Statistics Missouri University of Science and Technology Rolla, Cap. 3 Elliptic Integrals and Elliptic Functions.
- [6] Byrd P., Friedman M., (1971), *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists*, Springer, Cap. 1 Definition and fundamental relations.
- [7] Levien, Ralph (2008), *The elastica: a mathematical history*, Department of Electrical Engineering and Computer Sciences, University of California at Berkeley.
- [8] Abate M., Tovenaf., (2006), *Curve e superfici*, Springer-Verlag, Milano.
- [9] Wikipedia, <https://en.wikipedia.org/wiki/Leibniz-integral-rule>.
- [10] Wikipedia, <https://it.wikipedia.org/wiki/Teoria-delle-biforcazioni>.

- [11] Zaccaria, Daniele, *Dispense del corso di meccanica dei solidi*, Parte Quarta: stabilità e biforcazione dell'equilibrio.